КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра общей математики

Е.А. ШИРОКОВА

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Казань – 2015

УДК 517

Принято на заседании кафедры общей математики
Протокол №7 от 01.07 2015 г.

Рецензенты:
кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
общей математики КФУ **В.А. Сочнева**,
кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
общей математики КФУ **Е.П. Аксентьева**

Широкова Е.А.
Математика. Учебно-методическое пособие / Е.А.Широкова.– Казань: Казан. ун-т, 2015 – 64 с.

Учебно-методическое пособие представляет собой лекции по курсу «Математики» в КПФУ для студентов, обучающихся по направлению 46.03.01– «История».
В пособии рассмотрены темы «Элементы математической логики», «Элементы теории множеств», «Комбинаторика», «Непрерывные функции и производные», «Интегралы», «Элементы теории вероятностей», «Элементы математической статистики» с набором примеров по каждой теме.

Элементы математической логики

Логика – это наука, изучающая формы и законы мышления. Само слово произошло от греческого logos, что означает «слово, понятие, разум». Законы и правила формальной логики необходимо знать для построения правильных рассуждений. Согласно основному принципу логики правильность рассуждения (вывода) определяется только его логической формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него рассуждений. Отличительной особенностью правильного вывода является то, что из истинных утверждений всегда получаются истинные заключения. Это позволяет из одних истин получать другие с помощью только рассуждений, разума и без обращения к опыту.

Как самостоятельная наука, логика оформилась в трудах греческого философа Аристотеля (384-322 гг. до н.э.). Он систематизировал известные до него сведения, и эта система стала впоследствии называться традиционной или аристотелевой логикой. Аппарат этой логики оказался настолько мощным, что, например, на его основе известный средневековый философ и богослов Фома Аквинский осуществил обоснование всей христианской теологии. Немецкий математик Лейбниц впервые высказал мысль о том, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по определенным правилам, и это позволяет всякие рассуждения заменить вычислением. Он писал, что единственное средство улучшения умозаключений состоит в уподоблению их математическим, «чтобы ошибочность их можно было увидеть глазами, и если между людьми возникают разногласия, достаточно было бы сказать «Вычислим!» и станет ясно, кто прав». Это проделал в своей работе «Исследование законов мысли» Джордж Буль, в результате чего логическая теория приняла вид обычной алгебры и получила название алгебры высказываний или булевой алгебры, которую мы и будем изучать.

Математическая логика – разновидность формальной логики, т.е. науки, которая изучает умозаключения с точки зрения их формального строения. Как наука математическая логика содержит множество разделов, например, теорию доказательств. Мы, в основном, познакомимся с наиболее простым разделом математической логики – с **логикой высказываний**. В этом разделе вопрос об истинности или ложности высказываний рассматривается и решается на основе изучения способа построения высказываний из так называемых элементарных с помощью логических операций или связок. Основным понятием этого раздела логики естественно является высказывание.

Высказыванием называется повествовательное предложение, про которое всегда определенно можно сказать, является оно истинным (И) или ложным (Л). Примеры высказываний: «Дважды два четыре», «Земля вращается вокруг Солнца», «3>5», «10 – нечетное число», «На улице идет дождь». Побудительные предложения («Кругом», «Идите к доске»), вопросительные («Сколько времени?») и восклицательные («Ак Барс – чемпион!») высказываниями не являются. Логические операции на множестве высказываний задаются аксиоматически с применением таблиц истинности, указывающих значение (И или Л) результата операции при задании значений исходных высказываний.

Аксиоматика операций над высказываниями.

1) **Отрицание**. Логическая операция, соответствующая логической связке «не» называется отрицанием. В результате этой операции получается высказывание ложное, если исходное высказывание истинно и истинное, если исходное ложно. Она обозначается $\bar{A}$ или $\neg A$ и читается «не A». Например, если A – это высказывание «математическое утверждение доказано», то высказывание «математическое утверждение не доказано» обозначается $\bar{A}$. Соответствие между высказываниями определяется таблицами истинности. В нашем случае эта таблица имеет вид:

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

Пример. A: «ΔABC остроугольный.», тогда $\bar{A}$: «неверно, что ΔABC остроугольный» или $\bar{A}$: «ΔABC прямоугольный или тупоугольный.» Пример показывает, что отрицание не обязательно содержит частицу «не» в явном виде, – отрицание может содержаться и в смысловом оттенке фразы.

2) **Конъюнкция.** Операция конъюнкции применяется к двум высказываниям A и B и соответствует соединению их с помощью союза «и». Она обозначается A & B или A^B или A·B (читается: A и B). Например, «Он мой сокурсник и друг». Конъюнкция двух высказываний A и B будет истинной тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Поэтому таблица истинности для конъюнкции имеет вид

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Предложение «Солнце светит и на улице тепло» представляет собой конъюнкцию двух высказываний Х: «Солнце светит.» и У: «На улице тепло».

3) **Дизъюнкция.** Операция дизъюнкции применяется к двум высказываниям А и В и соответствует соединению их с помощью союза «или». Она обозначается $A \vee B$ (читается: А или В). Например, «Договор может быть заключен в устной или письменной форме». Дизъюнкция двух высказываний А и В будет ложной тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. Поэтому таблица истинности для конъюнкции имеет вид

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Заметим, что в обыденной речи союз «или» употребляется в двух смыслах:

1) неразделительном, как, например, в предложении « Право бесплатного проезда имеют пенсионеры или ветераны труда» (очевидно, что если человек одновременно пенсионер и ветеран труда, то правом бесплатного проезда он может пользоваться); 2) разделительном. Например, молодой человек говорит другу: «Вечером я пойду на дискотеку или посижу в библиотеке». Очевидно, он куда-то не пойдет.

На самом деле это два разных союза. У древних римлян в качестве неразделительного «или» использовалось слово «vel», а разделительного слово «aut». Дизъюнкция это неразделительное «или».

Рассмотренные три операции называют *булевыми*.

4) **Импликация.** Операция импликации соответствует объединению двух высказываний с помощью союза «если A , то B». Она обозначается A→B. Например, «Если студент-контрактник в течение 2-х сессий получал только отличные отметки, то по его ходатайству деканат может перевести его на бюджетную форму обучения». Импликация двух высказываний A и B ложна тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а B – ложно. Высказывание A называется посылкой импликации, а высказывание B – следствием. Таблица истинности имеет вид

A	B	A→B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Приведем несколько выражений, которые считаются имеющими тот же смысл, что и «если A , то B» (где A и B высказывания): «A влечет B», «A только тогда, когда B», «B при условии A», «A, только если B», «B, если A». Следует уточнить, что логическими операциями никак не учитывается смысл высказываний в них участвующих. Высказывания рассматриваются как объекты, обладающие единственным свойством быть истинными или ложными. Например: Пусть X: «Луна сделана из зеленого сыра», а У: «2+2=5», тогда согласно таблице раз X ложно, то импликация X→ У будет истинна , хотя никакой связи по смыслу между X и У нет. Точно так же, если У– это «2+2=4», то X→ У – истинно , причем совершенно независимо от того есть ли связь между «Луна состоит из зеленого сыра» и «2+2=4». Такое уточнение смысла импликации «если X, то У» не противоречит обыденному смыслу. Например обещание «Если мне подарят велосипед, то я дам тебе покататься» воспринимается как ложь только в том случае, если мне подарили велосипед, а покататься на нем я не дал.

5) **Эквиваленция.** Эквиваленция обозначается A↔B (читается: A эквивалентно B или A равносильно B или A тогда и только тогда, когда B). Например, «Четное число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3» или «Студент допускается к сессии в том и только в том случае, если он сдаст все зачеты». Эквиваленция двух высказываний A и B истинна тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают. Поэтому таблица истинности для эквиваленции имеет вид

A	B	A↔B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Основные законы логики высказываний.

Следующие законы являются логическими следствиями введенных булевых операций и доказываются, как теоремы, с применением таблиц истинности. Перечислим эти законы.

1. Коммутативность конъюнкции: $A \wedge B = B \wedge A$.

2. Коммутативность дизъюнкции: $A \vee B = B \vee A$.

3. Ассоциативность конъюнкции: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.

4. Ассоциативность дизъюнкции: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.

5. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

6. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

7. Закон де Моргана относительно конъюнкции: $\overline{(A \wedge B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$.

8. Закон де Моргана относительно дизъюнкции: $\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \wedge \bar{B}$.

9. Закон поглощения для дизъюнкции: $A \vee (A \wedge B) = A$.

10. Закон поглощения для конъюнкции: $A \wedge (A \vee B) = A$.

11. Закон идемпотентности для конъюнкции: $A \wedge A = A$.

12. Закон идемпотентности для дизъюнкции: $A \vee A = A$.

13. Закон противоречия: $A \wedge \bar{A} = "Л"$.

14. Закон исключения третьего: $A \vee \bar{A} = "И"$.

15. Закон двойного отрицания: $\overline{(\bar{A})} = A$.

16. $A \wedge "Л" = "Л"$, $A \wedge "И" = A$.

17. $A \vee "Л" = A$, $A \vee "И" = "И"$.

Равенства в приведенных законах означает совпадение значений левой и правой частей равенства при любых значениях входящих в выражение высказываний.

Доказательство каждого закона представляет собой составление таблицы истинности, перебор всевозможных значений входящих в закон высказываний и сравнение значений высказываний левой и правой частей равенства. Приведем примеры доказательств законов 5 и 7.

Для доказательства закона 5, зададим всевозможные наборы значений для множеств A, B и C (первые три столбца).

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
И	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	И	И	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	Л	И	И

Заполним 4-й, 6-й и 7-й столбцы в соответствии с аксиоматически заданными таблицами значений для соответствующих операций. После этого заполним 5-й и 8-й столбцы. Мы видим, что значения на соответствующих строках совпадают. Закон доказан.

Аналогичным способом доказывается 7-й закон:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л	И
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Студенты должны самостоятельно доказать остальные законы.

Полученные законы мы сможем применять для упрощения сложных высказываний.

Формулы логики высказываний

Пусть A,B,C,…,X,У,Z (прописные латинские буквы)– переменные, которыми мы будем обозначать элементарные высказывания. Такие переменные называются высказывательными или пропозиционными. Рассмотрим: символы логических операций $\bar{\ }$ ($\neg$) , $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ и скобки для указывания порядка действий.

Из перечисленных элементов составляются формулы. Чтобы из повествовательного предложения получить формулу нужно

1) выделить все элементарные высказывания и логические операции, образующие данное предложение,
2) заменить их соответствующими буквами и символами,

3) в соответствии со смыслом предложения расставить скобки, установив порядок действий.

Примеры. 1. Предложение «Сдать зачет по математике можно, зная блестяще теорию или решив все примеры » можно представить так $A\vee B$, где A: «Сдать зачет можно, зная блестяще теорию», B: «Сдать зачет можно, решив все примеры»

2. Предложение «Если Сувар или Таиф проиграют, а Феникс выиграет тендер, то Альбатрос упрочит свое положение и мы понесем убытки» представляет собой импликацию $A\rightarrow B$, где посылка A составлена из трех элементарных высказываний: P: « Сувар проиграет», Q: «Таиф проиграет», R: «Феникс выиграет», а заключение B есть конъюнкция высказываний: D: «Альбатрос упрочит свое положение» и C: «Мы понесем убытки».С помощью введенных символов первоначальное предложение записывается в виде формулы: F: $((P\vee Q)\wedge R)\rightarrow(D\wedge C)$.

Если истинностные значения простых переменных P, Q, R, D, C соответственно равны И, Л, Л, И, Л, то истинностное значение сложного высказывания F может быть определено механически, используя таблицы истинности логических операций, следующим образом

$$((P\vee Q)\wedge R)\rightarrow(D\wedge C)$$

$$((И\vee Л)\wedge Л)\rightarrow(И\wedge Л)$$

$$(И \wedge Л) \to Л$$

$$Л \to Л$$

$$И$$

Таким образом, при заданном наборе значений простых высказываний, используя аксиоматику логических операций, мы определяем значение высказывания, получаемого с помощью логической формулы.

Если дано сложное высказывание в виде логической формулы, то часто бывает важно знать, для какого набора значений переменных это сложное высказывание истинно, для какого ложно. Тогда, как и при доказательстве законов логики, применяют таблицы истинности, в которых дается перебор всех возможных комбинаций значений простых высказываний, из которых состоит логическая формула, и получение соответствующих значений сложного высказывания.

Пример. Доказать, что при любых значениях P и Q справедлива формула $(P \to Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$.

P	Q	$P \to Q$	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$	$(P \to Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$
И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Высказывание, истинное при любых значениях входящих в нее простых высказываний, называется **тавтологией**.

В случае, когда логическая формула содержит булевы операции, доказательства тавтологий или упрощение формул проще проводить, не строя таблицы истинности, а применяя доказанные нами основные законы логики высказываний.

Пример. Доказать тавтологию $P \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \bar{Q})$.

Согласно закону 14 правая часть эквиваленции имеет вид $P \wedge "И"$, Применяем вторую часть закона 16, тогда правая часть превращается в P. Поскольку любое высказывание равносильно самому себе, тавтология доказана.

Пример. Упростить высказывание $\overline{(A\vee(A\wedge B))}\vee(A\vee(C\wedge\bar{A}))$.

Последовательно применяя законы, имеем: $\overline{(A\vee(A\wedge B))}\vee(A\vee(C\wedge\bar{A}))= =(\bar{A}\wedge\overline{(A\wedge B)})\vee((A\vee C)\wedge(A\vee\bar{A}))=(\bar{A}\wedge(\bar{A}\vee\bar{B}))\vee(A\vee C)=((\bar{A}\wedge\bar{A})\vee(\bar{A}\wedge\bar{B}))\vee(A\vee C)=(\bar{A}\vee(\bar{A}\wedge\bar{B}))\vee(A\vee C)=\bar{A}\vee(A\vee C)=(\bar{A}\vee A)\vee C= ="И"\vee C="И"$. Таким образом, исходное высказывание – тавтология.

Пример. Доказать, что справедлива формула $(A\wedge\bar{B})\vee(B\wedge\bar{A})=(A\vee B)\wedge\overline{(A\wedge B)}$.

$(A\wedge\bar{B})\vee(B\wedge\bar{A})=((A\wedge\bar{B})\vee B)\wedge((A\wedge\bar{B})\vee\bar{A})=$
$=((A\vee B)\wedge(\bar{B}\vee B))\wedge((A\vee\bar{A})\wedge(\bar{B}\vee\bar{A}))=$
$((A\vee B)\wedge"И")\wedge("И"\wedge(\bar{B}\vee\bar{A}))=(A\vee B)\wedge(\bar{B}\vee\bar{A})=(A\vee B)\wedge\overline{(A\wedge B)}$, что и требовалось доказать.

Построение противоположного высказывания

Пользуясь законами де Моргана, нетрудно определить правило, по которому строится высказывание, противоположное данному. Для построения противоположного высказывания, следует записать высказывание в виде формулы, а затем надчеркнуть эту формулу и упростить полученное высказывание, пользуясь доказанными законами математической логики.

Очень часто в высказываниях (особенно, математических) присутствуют кванторы общности ($\forall$) или существования ($\exists$). При построении противоположного высказывания данные кванторы взаимно заменяют друг друга. Поэтому правило построения высказывания, противоположного высказыванию, содержащему кванторы, такое. **В исходном высказывании выделяется основная фраза, которая содержится в последней части высказывания. При построении противоположного высказывания кванторы взаимно заменяются, а последняя фраза заменяется на противоположную.**

Примеры. 1. Исходная фраза: «Каждого человека посещает мысль о том, что либо он должен поместить все деньги в банк, либо приобрести акции нефтяных компаний».

Запишем с помощью кванторов: « у $\forall$ человека $\exists$ мысль (($\forall$ деньги положить в банк)$\vee$(приобрести акции нефтяных компаний))». То, что мы поместили в скобку, и есть основная фраза, содержащаяся в последней части высказывания. Фраза, противоположная той, что в скобках, в формальной записи имеет вид: (($\exists$ деньги, не положенные в банк)$\wedge$(не приобретать акции нефтяных компаний)). Операция дизъюнкции заменена на операцию конъюнкции в соответствии с законом де Моргана. Запись высказывания, противоположного исходному, в кванторах имеет вид: «$\exists$ человек , у которого $\forall$ мысль (($\exists$ деньги, не положенные в банк)$\wedge$(не приобретать акции нефтяных компаний))».

После некоторой литературной обработки наше высказывание принимает вид: «Есть люди, твердо уверенные в том, что не все деньги следует доверять банкам и что нельзя покупать акции нефтяных компаний».

2. Аналогичным способом строятся высказывания, противоположные математическим, таким как «Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом x, обладающем свойством $|x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$».

Запишем исходное высказывание в кванторах: «$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x, |x| < \delta, (|f(x)| < \varepsilon)$». Противоположное высказывание в кванторах имеет вид «$\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0 \exists x, |x| < \delta, (|f(x)| \geq \varepsilon)$». Читается противоположное высказывание так: «существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого положительного δ можно подобрать такое x, что $|x| < \delta$, и при этом $|f(x)| \geq \varepsilon$».

Кстати, исходное высказывание – это математическое определение того факта, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ предел, равный 0. Противоположное высказывание – это математическое определение того, что у функции $f(x)$ в точке $x = 0$ либо не существует предела, либо есть предел, отличный от нуля.

Задания

1. Среди предложений выделите высказывания и определите их истинностные значения: 1) Рыбы живут в воде. 2) Осень – хорошее время года. 3) Казань – столица США. 4) Волга впадает в Каспийское море. 5) Не ходи сюда! 6) 2 + 2 = 4. 7) 3 – 5 = 8.

2. Пусть А: «Сегодня буду писать отчет»; В: «Сегодня буду отдыхать»; С: «На улице идет дождь». Сформулируйте предложения соответствующие формулам:

1) A^B, 2) C^B, 3) ⌐A^B, 4) C^A, 5) A ∨ ⌐B, 6) ⌐ C ∨ A, 7) C→ B∨A, 8) (B↔C) ^A.

3. Составьте формулы, соответствующие повествовательным предложениям, обозначая буквами элементарные высказывания: 1) Идет дождь или кто-то не выключил душ; 2) Если вечером будет туман, то я останусь дома или вынужден буду взять такси; 3) Если я устал или голоден, то не могу заниматься; 4) Если Роман проснется и пойдет на лекцию, то он будет доволен, а если не проснется, то не будет доволен; 5) Хлеба уцелеют тогда и только тогда, когда будут вырыты ирригационные канавы, а если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят свои фермы.

4. Сформулируйте словесно высказывания:
1) $(A \vee B) \to C$, $C \to (A \wedge B)$, где A: лето жаркое; B: лето дождливое; C: я поеду в отпуск;
2) $(A \wedge B) \to C$, $(A \vee B) \to C$, где A: фигура ромб; B: фигура прямоугольник; C: фигура параллелограмм;
3) $(\neg A \vee B) \to \neg C$, $C \to (A \vee \neg B)$, где A: сегодня светит солнце; B: сегодня сыро; C: я поеду на дачу.

5. Докажите с помощью таблиц истинности равносильность формул:
1) $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$;
2) $(A \to B) \wedge (A \to C) \equiv A \to (B \wedge C)$.

6. В результате тестирования были установлены следующие факты(И):
1) если Иванов не увлекается историей, то либо Петров , либо Сидоров ею увлечены, причем не Сидоров и Иванов одновременно;
2) если Сидоров не увлечен историей, то Иванов увлечен ею, Петров нет;
3) если Иванов историк, то и Сидоров историк.
Выяснить, кто согласно указанным фактам увлекается историей.

7. Пусть значение высказывания $A \to B =$ И, что можно сказать о значении высказывания
$\neg A \wedge B \leftrightarrow A \vee B$?

8. Проверить, является ли данная логическая формула тавтологией:
1) $(A \vee B) \to B \vee \neg A$; 2) $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$; 3) $A \to (A \vee (\neg B \wedge A))$.

9. Переведите каждое рассуждение в логическую символику и установите, имеет ли место в нем логическое следование:

1) Если он принадлежит к нашей компании (К), то он храбр (Х) и на него можно положиться (П). Он не принадлежит нашей компании. Значит, он не храбр или же на него нельзя положиться.
2) В бюджете возникнет дефицит (D), если не повысят пошлины (Р). Если в бюджете имеется дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся (О). Значит, если повысят пошлины, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.
3) Если он автор этого слуха (А), то он глуп (Г) или беспринципен (Б). Он не глуп и не лишен принципов. Значит, не он автор этого слуха.
4) Если бы он ей не сказал, она ни за что не узнала бы. А не спроси она его, он бы и не сказал. Но она узнала. Значит: Она его спросила.
5)**.** Если бы он не пошел в кино, он не получил бы двойки. Если бы он подготовил домашнее задание, то он не пошел бы в кино. Он получил двойку. Значит, он не подготовил домашнее задание.

10. Проверить правильность рассуждения средствами логики суждений: «Если бы он не пошел в кино, он не получил бы двойки. Если бы он подготовил домашнее задание, то он не пошел бы в кино. Он получил двойку. Значит, он не подготовил домашнее задание».

19. Пользуясь правилом построения противоположного высказывания, записать утверждения, противоположные следующим:

1) На любом курсе каждого факультета КГУ есть студенты, сдающие все экзамены на «отлично».
2) Каждый студент философского факультета КГУ имеет друга, который умеет решать все логические задачи.
3) В любом самолете на рейсе Вашингтон-Москва присутствует хотя бы один сотрудник силовых органов, в каждой пуговице одежды которого вмонтирован микрофон.

Элементы теории множеств

Понятие **множества** или **совокупности** принадлежит к числу простейших математических понятий. Оно не имеет точного определения. Любое множество задается своими элементами. Примерами являются множество книг в библиотеке или множество студентов, присутствующих на занятии. Обычно множество обозначают заглавными латинскими буквами (A), а его элементы строчными латинскими буквами (a). То, что элемент принадлежит множеству, обозначают так: $a \in A$. Если a не принадлежит A, то этот факт обозначают так: $a \notin A$.

Чтобы задать множество, следует или перечислить его элементы, или указать характеристическое свойство его элементов, то есть такое свойство, которым обладают все элементы множества и только они.

Примеры. 1. Множество натуральных чисел можно задать так: $N=\{1, 2, 3,\ldots,n, n+1,\ldots\}$. Из записи следует, что все натуральные числа, начиная с двойки, получаются прибавлением единицы к предыдущему числу.

2. Множество целых чисел можно задать так: $Z=\{0, 1, -1, 2, -2,\ldots,n, -n,\ldots\}$.
3. Множество рациональных чисел можно задать так:

$Q=\{\frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N\}$. Вертикальная черта внутри фигурной скобки означает, что далее идет описание характеристических свойств введенных обозначений.

Два множества равны тогда и только тогда, когда состоят из одних и тех же элементов. Если все элементы множества A содержатся в множестве B, то говорят, что A является подмножеством множества B и обозначают $A \subset B$.

В рамках рассматриваемой математической теории вводят два исключительных множества: пустое множество ($\varnothing$), не содержащее элементов, и универсальное множество или «универсум» (U), содержащее все элементы данной теории.

Аксиоматика операций над множествами.

Основными операциями над множествами являются следующие.

1. **Дополнение.** Для любого множества $A \subset U$ определим дополнение $A^c = \{b \in U \mid b \notin A\}$.

Например, в множестве вещественных чисел дополнением к множеству Q является множество всех иррациональных чисел.

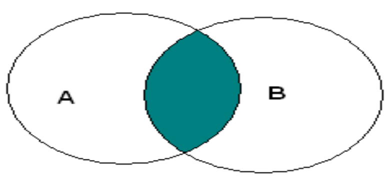
2. **Объединение.** Для любых двух множеств $A, B \subset U$ определим объединение $A \cup B = \{c \in U \mid (c \in A) \vee (c \in B)\}$.

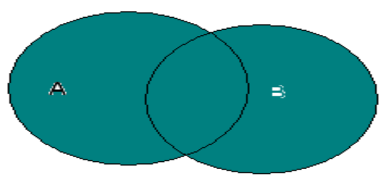
Например, объединением отрезков [1,3] и [2,7] является отрезок [1,7].

2. **Пересечение.** Для любых двух множеств $A, B \subset U$ определим пересечение $A \cap B = \{c \in U \mid (c \in A) \wedge (c \in B)\}$.

Например, пересечением отрезков [1,3] и [2,7] является отрезок [2,3].

Для иллюстрации операций над множествами вводят диаграммы Эйлера-Венна – круги, обозначающие множества. Так, введенные нами операции иллюстрируются следующим образом.



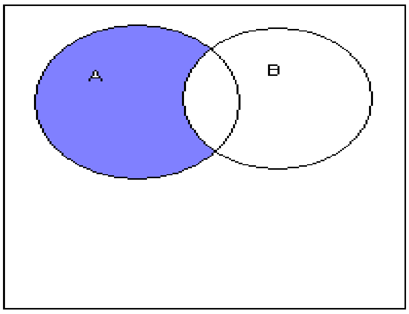


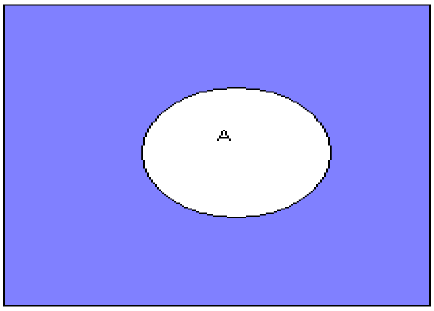
$A \cap B$ $\qquad\qquad$ $A \cup B$

Подчеркнем, что диаграммы Эйлера-Венна не могут служить доказательствами равенства множеств.

Кроме введенных нами трех операций над множествами существуют еще операции, которые могут быть представлены как комбинация простейших операций. Введем операцию **вычитания** множеств:

$A \setminus B = \{c \in U \mid (c \in A) \wedge (c \notin B\}$. На диаграмме Эйлера-Венна результат вычитания выглядит так:





$A \setminus B$ $\qquad\qquad$ $B^c = U \setminus B$

Докажем, что $A \setminus B = A \cap B^c$. Для доказательства равенства двух множеств следует убедиться в том, что все элементы первого множества принадлежат второму и все элементы второго множества принадлежат первому.

а) Пусть $x_0 \in A \setminus B$. Из определения следует, что справедливо высказывание $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \notin B)$. Из определения дополнения к множеству B следует, что $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \in B^c)$. Теперь из определения пересечения множеств следует, что $x_0 \in A \cap B^c$. То есть, любой элемент из множества $A \setminus B$ принадлежит множеству $A \cap B^c$.

б) Пусть $x_0 \in A \cap B^c$. Из определения пересечения множеств следует, что $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \in B^c)$. Из определения дополнения множества получим $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \notin B)$. В соответствии с определением разности множеств $x_0 \in A \setminus B$. Следовательно, любой элемент из множества $A \cap B^c$ принадлежит множеству $A \setminus B$.

Доказательство равенства двух множеств закончено.

Нетрудно заметить, что при доказательстве, связанном с множествами, большую роль играют высказывания, присутствующие в определении высказывания. Поскольку эти высказывания содержат логические операции, естественно предположить, что законы, справедливые для логических операций, могут быть перенесены на множества. Это, действительно, так.

Основные законы теории множеств

Следующие законы являются следствием соответствующих законов логики высказываний. Перечислим эти законы.

1. Коммутативность пересечения: $A \cap B = B \cap A$.

2. Коммутативность объединения: $A \cup B = B \cup A$.

3. Ассоциативность пересечения: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

4. Ассоциативность объединения: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

5. Дистрибутивность пересечения относительно объединения: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

6. Дистрибутивность объединения относительно пересечения: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7. Закон де Моргана относительно пересечения: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

8. Закон де Моргана относительно объединения: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

9. Закон поглощения для объединения: $A \cup (A \cap B) = A$.

10. Закон поглощения для пересечения: $A \cap (A \cup B) = A$.

11. Закон идемпотентности для пересечения: $A \cap A = A$.

12. Закон идемпотентности для объединения: $A \cup A = A$.

13. Закон противоречия: $A \cap A^c = \varnothing$.

14. Закон исключения третьего: $A \cup A^c = U$.

15. Закон двойного отрицания: $(A^c)^c = A$.

16. $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap U = A$.

17. $A \cup \varnothing = A$, $A \cup U = U$.

Для доказательства равенств, присутствующих в законах, следует показать, что множества, стоящие по обе стороны знака равенства, состоят из одних и тех же элементов.

Приведем пример **доказательства закона 6**.

а) Пусть $x_0 \in A \cup (B \cap C) \to (x_0 \in A) \vee (x_0 \in (B \cap C)) \to$ $(x_0 \in A) \vee ((x_0 \in B) \wedge (x_0 \in C))$. Все использованные нами импликации основываются на определениях. Теперь применим к последнему высказыванию шестой закон логики высказываний. Получим $x_0 \in A \cup (B \cap C) \to ((x_0 \in A) \vee (x_0 \in B)) \wedge ((x_0 \in A) \vee (x_0 \in C))$. В соответствии с определениями пересечения и объединения множеств имеем $x_0 \in A \cup (B \cap C) \to (x_0 \in (A \cup B)) \wedge (x_0 \in (A \cup C)) \to x_0 \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$. Таким образом,

$$x_0 \in A \cup (B \cap C) \to x_0 \in ((A \cup B) \cap (A \cup C)).$$

б) Пусть $x_0 \in ((A \cup B) \cap (A \cup C)) \to ((x_0 \in A) \vee (x_0 \in B)) \wedge ((x_0 \in A) \vee (x_0 \in C))$, что следует из определений пересечения и объединения. Теперь согласно шестому закону логики высказываний $x_0 \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ $\to (x_0 \in A) \vee ((x_0 \in B) \wedge (x_0 \in C))$, и снова из определений объединения множеств и пересечения множеств $x_0 \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ $\to x_0 \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.

Доказательство закончено.

Студенты должны самостоятельно доказать все равенства, приведенные в законах теории множеств, основываясь на соответствующих равенствах в законах логики высказываний, и убедиться в том, что такие разные разделы математики, как математическая логика и теория множеств, могут иметь сходные свойства с точки зрения действующих там законов.

Используя законы теории множеств, легко упрощать представление множеств, заданных с помощью последовательности операций.

Пример.

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) =$$
$$= A \cap B.$$

Задания

1. Прочтите записи и перечислите элементы каждого из множеств:

$A = \{x \mid x \in N, x < 5\}$; $D = \{x \mid x \in Z, -5 < x \le 2\}$; $E = \{x \mid x \in Z, -3 \le x \le 2\}$.

2. Установите, какое из подмножеств A или B является подмножеством другого множества, если: 1) A={1; 2; 3; ... 10}, B={2; 4; 6 ;8}; 2) A={2; 4; 6; 8; 10}, B - множество чисел первого десятка; 3) A – множество четных однозначных чисел, B - множество однозначных чисел, кратных 4; 4) A-множество двузначных натуральных чисел, B - множество четных двузначных чисел; 5)A=N, D=No; 6) A=N, B=Z; 7) A=R, B=Z.

3. Заданы множества: A={3,5,7,a,c}; B={a,p,c,3,5,6,7}; C={a,3,c,7}. Расположите их так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.

4. Пусть A – множество всех натуральных делителей числа 18; B – множество всех натуральных делителей числа 24. Найти: 1) множество общих делителей чисел 18 и 24; 2) самый большой общий делитель.

5. Найдите пересечение и объединение множества A различных букв, входящих в слово “педагогика”, и множества B различных букв, входящих в слово “математика”.

6. Пусть даны множества A, B, C. Найдите $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, если:

1) A={2; 3; 8; 9}, B={16; 18; 20}, C=N; 2) A=N, B={-2; -1; 0; 1; 2}, C={3; 5; 7};

3) A={3; 4; 5; ...}, B=N, C={-1; 0; 1; 2}; 4) A={21; 22; ...; 26}, B={3; 5}, C=N.

7. Заданы множества A={1,2,3,5,a,c}, B={1,2,3,p,a}, C={5,c}. Какие из приведенных соотношений: 1) $B \subset A$, 2) $C \subset A$, 3) $A \setminus B = C$, 4) $A \cap B = C$, 5) $A \cap C = C$ верны?

8. Найти пересечение и объединение множеств:1) [3; 4] и [2; 6]; 2) (-1; 3) и (-4; 2]; 3) (-2; 1] и [-2; 0); 4) (-∞; 3) и (-1; ∞); 5) A=[-2; 3], B=(1; 5]; 6) A=[-1; 4], B=[1; 2); 7) A=(-∞; 2), B=[-3; ∞). (**Указание**. Для решения использовать числовую прямую).

9. Дано: A={1; 2; 3}, B={2; 4}, C=[2; 8]. Найдите результат следующих операций:

1) $A \cap (B \cup C)$; 2) $A \cup (B \cap C)$; 3) $(A \cup B) \cap C$; 4) $(A \cap C) \cup (A \cap B)$.

10. Найдите результаты операций для каждой тройки множеств A, B, C:

1) $A \cup (B \cap C)$; 2) $(A \cap B) \cap C$; 3) $A \cap (B \cup C)$; 4) $(A \cap B) \cup C$, если

а) A=(0;2], B=[-1; 3], C=(-3; 6); б) A=(-3; 6), B=[0; 4), C=[2; 7].

11. Найти разности A\B и B\A множеств A и B, если: 1) A={1; 2; 3; ...; 10}, B={5; 6; ...; 12}; 2) A – множество натуральных делителей числа 18; B – множество натуральных делителей числа 24; 3) A – множество правильных многоугольников, B – множество прямоугольников; 4) A={x|x∈R, 2≤x≤6}, B={ x|x∈R, 3≤x≤7}; 5) A={x|x∈R, 1<x≤4}, B={x|x∈R, 2<x≤8}; 6) A={x|x∈R, 0<x<2}, B={ x|x∈R, 1<x≤3}.

12. Для множеств A, B, C общего положения (т.е. A∩B∩C≠∅) на диаграмме Эйлера изобразить множества

1) (A∪C)\B; 2) (A\C)∪B; 3) (A∩B)\C; 4) (A∪B)∩C.

Функции одной переменной

Способы задания функций

Определение 1. Если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathrm{R}$ ставится в соответствие элемент множества $Y \subset \mathrm{R}$, говорят, что на множестве X задана функция $y = f\left(x\right)$, здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Определение 2. Множество X называется *<u>областью существования</u>* функции, или областью ее определения.

Определение 3. Множество Y называется *<u>областью значений</u>* функции.

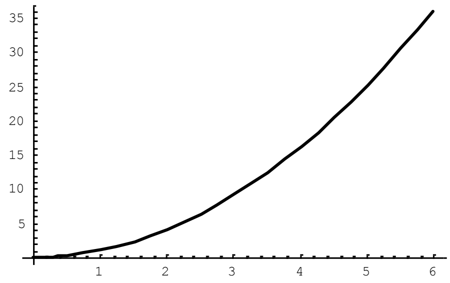
Примеры. 1. Показательная функция $y = 2^x,\ x \in \mathrm{R}$.

2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x,\ x > 0$.

3. Степенная функция $y = x^5, x \in \mathrm{R}$.

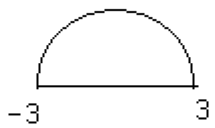
Функция может быть задана в виде таблицы или графика, либо формулой (аналитическое задание). В качестве примера приведена функция, аналитическое задание которой $y = x^2$, а табличное и графическое ее задания приведены ниже.

x	1	1.5	2	2.5	3	4	6
y	1	2.25	4	6.25	9	16	36

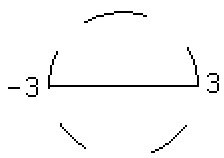


Аналитически функцию можно задать в явном виде $y = f(x)$ (*явное задание функции*), когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

Можно задать ее *неявно* $F(x, y) = 0$, когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией. Пример неявного задания функции $x^2 + y^2 = 9$. Нетрудно заметить, что эта формула задает фактически две непрерывные функции $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3,3]$,



и $y = -\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3,3]$. График первой функции представляет верхнюю полуокружность, график второй – нижнюю ее часть. Если не требовать непрерывности, то из соотношения $x^2 + y^2 = 9$ можно получить бесчисленное множество функций, заданных на отрезке [-3,3].



Кроме того, возможно *параметрическое задание функции* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, когда вводится дополнительный параметр $t \in [t_0, T]$. Примером является параметрическое уравнение той же, что и выше окружности $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$ в неявном виде записанное как $x^2 + y^2 = 9$.

Функции на множестве натуральных чисел в комбинаторике

В школьном курсе изучается много функций, задаваемых на вещественной оси или ее подмножествах. Подмножества эти являются отрезками, интервалами, полуинтервалами,….. В настоящем параграфе мы определим те функции, которые можно рассматривать только на множестве N, и найдем их приложения в **комбинаторике** – разделе математики, посвященном решению задач выбора и расположения элементов конечных множеств.

Основой для всех таких функций можно считать **факториал:**

$$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n.$$

1. Попробуем решить такую задачу: сколькими способами можно рассадить на n пронумерованных стульях n гостей? На первый стул можно посадить любого из n гостей. Выбрав одного из них, на второй стул можно усадить уже одного из оставшихся (n – 1) претендентов. Выбрав и этого, на третий стул выбираем одного из (n – 2) гостей… . На последний стул претендент будет только один. Таким образом, если двигаться от конца процесса, мы получим $1\times 2\times 3\times \ldots \times n = n!$ вариантов.

Взаимно однозначное отображение конечного упорядоченного множества на себя называется **подстановкой** элементов множества. Каждая последовательность элементов конечного множества с учетом порядка называется **перестановкой** этих элементов и обозначается P_n. Перестановки не меняют элементов множества или их количества, они меняют порядок элементов. Таким образом, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов P_n = n!.

2. Представим теперь, что, как в предыдущей задаче, у нас n пронумерованных стульев, но мы рассаживаем на них m претендентов, причем m > n. Конечно, всех усадить мы не сможем, но хотим выяснить, сколько имеется вариантов рассаживания. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, видим, что на 1-й стул имеется m претендентов, на второй (m – 1), на третий (m – 2),…., на n-й стул остается (m – n + 1) претендент. Итак, число вариантов равно

$$(m-n+1)\times(m-n+2)\times\ldots\times(m-1)\times m = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Любой упорядоченный набор n различных элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением** из m по n, число таких размещений обозначается A_m^n. Таким образом,

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

3. Рассмотрим теперь несколько другую задачу, где мы «раздаем» не сидячие места на пронумерованных стульях (как известно, человек не может сидеть одновременно более, чем на одном стуле), а, например, n раритетных книг группе страстных библиофилов, состоящей из m человек. Сколько вариантов раздачи n книг m претендентам? На первую книгу у нас m претендентов, на вторую – тоже m претендентов, и так далее. Следовательно, мы имеем m^n вариантов распределения книг между претендентами.

Любой упорядоченный набор n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением с повторением** из m по n и равен m^n.

4. Вернемся ко второй задаче, где мы рассаживали m человек на n стульях, только теперь у нас стулья не пронумерованы, не отличаются друг от друга, и нас не интересует, где кто сидит, а интересует, сидит человек или стоит. Значит, число вариантов рассаживания совпадает с числом вариантов отбора из m гостей группы счастливчиков, состоящей из n человек, которые смогут сесть на стулья. Решение этой задачи можно связать с решением задачи 2. Представим, что мы решили бы задачу 2 таким образом: отбирали бы группы по n человек, а затем делали бы внутри группы отобранных для сидения n человек всевозможные перестановки, чтобы учесть все варианты рассаживания на пронумерованных стульях. Мы должны были бы получить тот же результат: A_m^n. Следовательно, количество вариантов выбора групп по n человек из m человек равно A_m^n, деленное на число перестановок в группе из n человек, то есть на $n!$.

Любое подмножество из n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **сочетанием** из m по n, и число сочетаний обозначается C_m^n. В соответствии с рассуждениями при решении задачи, $C_m^n = \frac{A_m^n}{n!}$ или $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

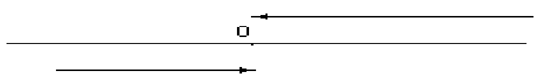
Функция, непрерывная в точке

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X \subset \mathrm{R}$ и $a \in X$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то говорят, что эта функция непрерывна в точке a. По-другому можно записать свойство непрерывности так:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$. Свойство непрерывности функций передается суперпозиции этих функций: если $y = f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$, то функция $z = h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Функция, непрерывная в каждой точке множества X, называется непрерывной на множестве X. График непрерывной функции представляет собой непрерывную кривую. Все известные из школьного математического курса функции непрерывны в областях, где они заданы: многочлены, e^x, $\ln x$ при $x > 0$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, $\operatorname{ctg} x$ при $x \neq \pi k,\ k \in Z$.

Пример разрывной функции – функция $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$



Условие дифференцируемости функции в точке

Условию непрерывности функции $f(x)$ в точке a можно дать следующее определение: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(a+\Delta x) - f(a)) = 0$, где $\Delta x = x - a$ называется приращением аргумента, а $\Delta f = f(x) - f(a)$ называется соответствующим приращением функции. В связи с этим возникает вопрос о сравнении малых величин Δx и Δf при стремлении Δx к нулю.

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке a, если существует такая константа A, что $\Delta f = A\Delta x + \alpha$ при достаточно малых значениях Δx, где $\alpha -$ величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx.

Из определения следует, что функция, дифференцируемая в точке, является непрерывной в этой точке. Более того, следует, что величина Δx не может быть величиной большего порядка малости, чем Δf, в противном случае величина A была бы не константой, а бесконечной величиной.

В случае дифференцируемости функции в точке соответствующая константа A имеет свое название: она называется **производной** функции $f(x)$ в точке a и обозначается $f'(a)$. Из определения также очевидно, что производная определяется с помощью предельного перехода следующим образом:

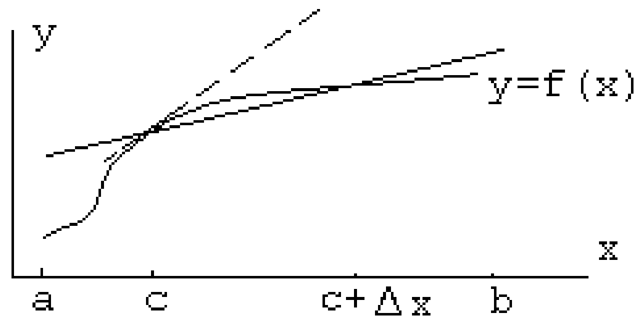
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Условие дифференцируемости имеет важные геометрический и физический смыслы.

Задача о проведении касательной к кривой

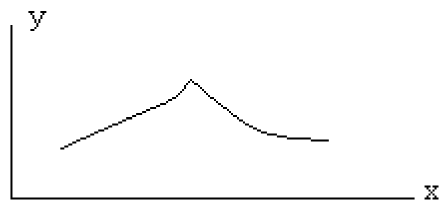
Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$. Требуется провести касательную к этой кривой в точке $c \in (a,b)$. Заметим, что **касательная** – это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(c, f(c))$ и $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$, когда $\Delta x \to 0$. Уравнение хорды – прямой, проходящей через две заданные различные точки, – имеет вид: $\dfrac{x - c}{(c + \Delta x) - c} = \dfrac{y - f(c)}{f(c + \Delta x) - f(c)}$ или $y = f(c) + \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}(x - c)$. Делая предельный переход при $\Delta x \to 0$, получим предельное значение углового коэффициента хорд – угловой коэффициент касательной: $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$. На рисунке касательная представлена пунктиром.

Итак, $k = tg\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси OX.



Таким образом, уравнение касательной в точке $(c, f(c))$ имеет вид $y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$.

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.



Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции. Существование касательной означает, что равны пределы отношения $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0 \pm 0$, то есть, что существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)$. Это значит, что $f(c+\Delta x)-f(c)=f'(c)\Delta x+\Delta x\cdot a$, где $a\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $\Delta x\cdot a=\alpha-$ величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx. Таким образом, для того, чтобы можно было провести касательную к кривой $y=f(x),\ x\in[a,b]$ в точке $(c, f(c))$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке *c*.

Задача о вычислении мгновенной скорости

Предположим, что мы следим за прямолинейным движением точки, пройденный путь которой в зависимости от времени выражается формулой $S(t)$. Чтобы вычислить среднюю скорость движения точки на участке $[t_0, t_0+\Delta t]$, достаточно получить значение $\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$. Если теперь устремить Δt к нулю, мы получим, что отрезок выродится в точку, а средняя скорость по отрезку при существовании предела $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ превратится в мгновенную скорость в точке t_0. Таким образом, производная функции $S(t)$, представляющей зависимость пути от времени, представляет мгновенную скорость в соответствующей точке.

Итак**, геометрическим** смыслом производной $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, **физическим** смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент

$x = x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y = f(x)$.

Из школьного курса вам известна таблица производных. Она приводится ниже.

Таблица производных

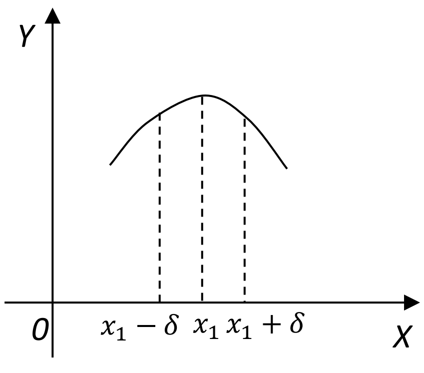
$(C)' = 0$, если C – постоянная	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Теорема о возрастании (убывании) функции $y = f(x)$ на интервале

Необходимое условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y = f(x)$, имеющая производную на интервале (a,b), возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на этом отрезке. Доказательство следует из формулы для производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где знаки числителя и знаменателя совпадают (противоположны), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

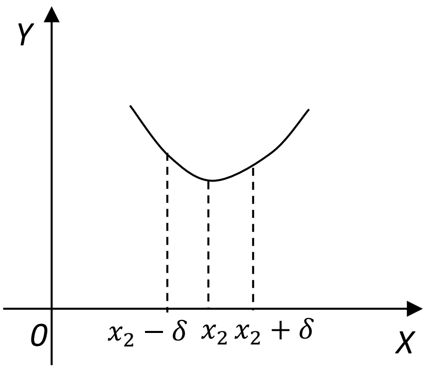
Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причем $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $a < x < b$, то эта функция возрастает (убывает) на этом отрезке.
Доказательство легко получается применением теоремы Лагранжа.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ в точке x_1 имеет **максимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_1



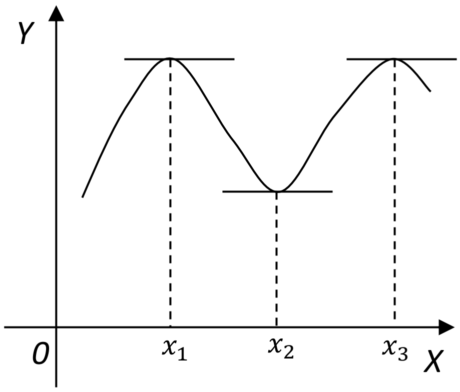
выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$ при $x \neq x_1$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ в точке x_2 имеет **минимум**, если для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_2 выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$ при $x \neq x_2$.



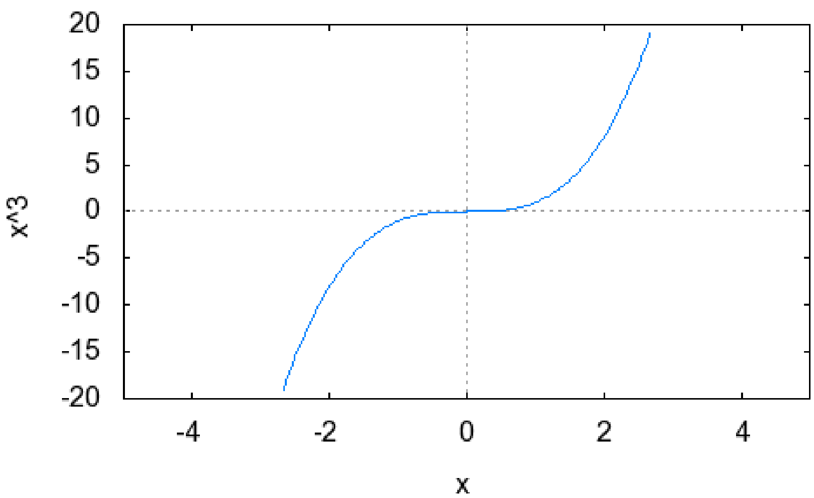
Определение 3. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции. Необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке c функции является $f'(c) = 0$.



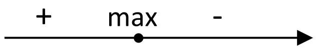
Доказательство. Пусть точка c – точка максимума, тогда $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$. Поскольку при вычислении производной пределы слева и справа должны совпадать, то есть $f'(c) = 0$.

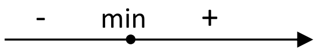
Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называются **критическими точками**. Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Теорема 1 о достаточном условии существования максимума и минимума функции.

Если производная функции при переходе через точку c меняет знак с + на –, это точка максимума. Если знак производной меняется с – на +, имеем точку минимума. Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.





П р и м е р. Пусть $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=x^3-3x^2=x^2(x-3)$, то критическими точками являются $x_1=0$, $x_2=3$. Применим первую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<3$, следовательно, в точке 0 экстремума нет. $y'(x)>0$ при $x>3$, следовательно, в точке 3 минимум функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Следует отличать минимумы и максимумы функций от наибольшего и наименьшего ее значений на заданном отрезке. Функция может не иметь экстремумов в исследуемой области, а наименьшее и наибольшее в этой области значения она имеет всегда.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

П р и м е р. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+1$ на отрезке $[1;4]$.

Находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)=0$, получаем две точки, одна из которых $x=0$ не входит в исследуемую область, добавляем к ним граничные точки, тогда $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$.

Определяем в этих точках значения функции $y_1=-1$, $y_2=-3$, $y_3=17$.

Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (-3) реализуется при $x=2$, наибольшее (17) при $x=3$.

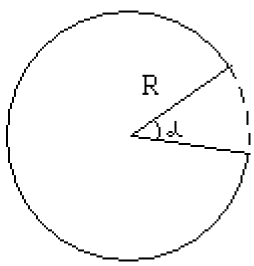
Задачи о нахождении наибольших и наименьших значений функций одного переменного

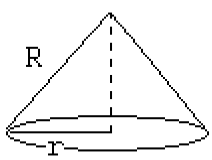
Задача 1. Владелец грузового судна должен перевезти груз по реке из одного порта в другой. Расходы этого владельца складываются из расходов на содержание экипажа и из затрат на топливо. Следует выяснить, какую скорость движения судна следует выбрать, чтобы плавание было наиболее экономичным, так как увеличение скорости ведет к большим тратам на топливо (расходы на топливо пропорциональны кубу скорости), а уменьшение скорости, а значит, увеличение времени пути приведет к большим тратам на питание команды.

Решение. Обозначим суточные расходы на топливо $k\cdot V^3$, а суточные расходы на питание команды a. Пусть S – расстояние, которое должна пройти баржа. Тогда время в пути равно $\frac{S}{V}$. Следовательно, путевые расходы составляют $F(V)=(k\cdot V^3+a)\cdot\frac{S}{V}$.

Нам нужно найти такое положительное значение V_0, которое обеспечит минимум введенной функции. Используя теорему о необходимом условии экстремума, приравняем нулю производную введенной функции: $(2k\cdot V-\frac{a}{V^2})\cdot S=0$. Получим точку экстремума $V_0=\sqrt[3]{a/(2k)}$. То, что мы получили минимум, а не максимум, следует из поведения функции $F(V)$ при значениях переменной V, близких к 0 и к бесконечности: функция $F(V)$ при таких значениях переменной стремится к положительной бесконечности. Следовательно, единственный экстремум этой функции может быть только минимумом. Таким образом, оптимальная скорость движения баржи по реке $V_0=\sqrt[3]{a/(2k)}$.

Задача 2. У слесаря есть жестяной диск. Какой сектор следует вырезать из этого диска, чтобы из оставшейся части диска можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

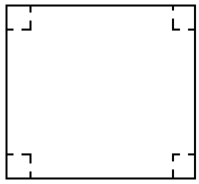




Решение. Очевидно, что сектор определяется углом при вершине. Обозначим этот угол α. Известно, что объем конуса (воронки) равен, в соответствии с введенными обозначениями, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$. Выразим через α радиус основания конуса r, сравнив площадь оставшейся части диска и площадь боковой поверхности конуса. Площадь оставшейся части диска равна $R^2 \frac{2\pi - \alpha}{2}$. Площадь боковой поверхности конуса равна $\pi R r$. Из соотношения $R^2 \frac{2\pi - \alpha}{2} = \pi R r$ получим $r = R\frac{2\pi - \alpha}{2\pi}$. Следовательно, $V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi R^3 (\frac{2\pi - \alpha}{2\pi})^2 \sqrt{1 - (\frac{2\pi - \alpha}{2\pi})^2}$. Вследствие громоздкости полученного выражения перейдем к новой переменной $t = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}$. Теперь $V(t) = \frac{1}{3}\pi R^3 t^2 \sqrt{1 - t^2}$, $0 \le t \le 1$. Найдем критическую точку этой функции на отрезке [0,1], именно она является точкой максимума, так как на концах отрезка функция обращается в нуль. Критической точкой является $t_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Следовательно, угол при вершине сектора, который нужно вырезать, равен $\alpha_0 = 2\pi(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Сеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади.
2. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты, и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?



3. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом $32 м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразная, множество первообразных

*Определение***.** Первообразной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Поскольку $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$, где $C-$постоянная, первообразных функции $f(x)$ бесчисленное множество.

Любые две первообразные функции $f(x)$ могут отличаться только на постоянную. Другими словами, если $F'(x) = f(x)$ и $\Psi'(x) = f(x)$, то $F(x) - \Psi(x) = C = \text{Const}$.

Определение. Множество всех первообразных одной функции называется **неопределенным интегралом этой функции** и обозначается $\int f(x)\,dx$, причем $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx-$ подынтегральным выражением. Очевидно, что если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$, где $N-$произвольная постоянная интегрирования, то есть постоянная может принимать любые значения.

Приведем таблицу неопределенных интегралов с проверкой того, что действительно производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$.	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.	$\left(\ln\lvert x\rvert + C\right)' = \dfrac{1}{x}$.
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.	$\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x$.
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.	$\left(-\cos x + C\right)' = \sin x$.

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.	$(\sin x)' = \cos x.$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	$(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	$(-\operatorname{ctg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C.$	$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C.$	$(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}.$
10. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C.$	$\left(\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C\right)' = \frac{1}{1-x^2}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+k}\right\rvert +$ $+C.$	$\left(\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+k}\right\rvert + C\right)' =$ $\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}.$

Приемы интегрирования

1. Тождественные преобразования подынтегрального выражения и сведение к табличным интегралам.

Из свойства производной

$$\left[k \cdot f(x) + l \cdot g(x)\right]' = k \cdot f'(x) + l \cdot g'(x)$$

следует аналогичное свойство для неопределенных интегралов

$$\int \left[k \cdot f(x) + l \cdot g(x)\right] dx = k \cdot \int f(x)\,dx + l \cdot \int g(x)\,dx.$$

П р и м е р 1. Вычислить $\int \frac{x-2}{x^3}dx$. Деля почленно числитель на знаменатель, представляя интеграл от разности в виде разности интегралов и вынося постоянный сомножитель за знак интеграла, получим в соответствии с таблицей

$$\int \frac{x-2}{x^3}dx = \int (x^{-2}-2x^{-3})dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + C = .$$
$$= x^{-2} - x^{-1} + C.$$

П р и м е р 2. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$. Воспользуемся тождеством $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Тогда получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= -\mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}x + C.$$

2. **Замена переменной в интеграле**.

Докажем, что если $F(x) + C = \int f(x)dx$, то $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. Имеем: $(F(x) + C)' = f(x)$. Следовательно, согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(\varphi(t)) + C)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Формулу интегрирования заменой переменной можно записать в виде

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\} = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к старой переменной x.

При подходящей замене переменной мы сводим заданный интеграл к табличному.

П р и м е р 1. Найти $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. Здесь $t = \sin x, \cos x dx = dt$. Следовательно, в соответствии с тем, что $\int e^t dt = e^t + C$, имеем $\int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x} + C$.

П р и м е р 2. Найти $\int \mathrm{tg}x\,dx$. Сделаем замену $t=\cos x,\ \ dt=-\sin x dx$. Тогда $\int \mathrm{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$.

П р и м е р 3**.** Найти $\int e^{-x^2}xdx$. Сделаем замену $-x^2=t$. Тогда $-2xdx=dt$ и $\int e^{-x^2}xdx=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

П р и м е р 4. Найти $\int\frac{dx}{x^2+2x+17}$. Выделим полный квадрат в знаменателе: $\int\frac{dx}{x^2+2x+17}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+16}$. Вынесем 16 из знаменателя: $\frac{1}{16}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{4}\right)^2}$ и сделаем замену $\frac{x+1}{4}=t$. Теперь мы получили табличный интеграл: $\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{4}\mathrm{arctg}t+C$. В результате имеем $\int\frac{dx}{x^2+2x+17}=\frac{1}{4}\mathrm{arctg}(\frac{x+1}{4})+C$.

3. **Интегрирование по частям**.

Пусть $u=u(x),\ \ v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx+C.$$

(или $\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$).

Доказательство. Справедливы соотношения:

$\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx=u(x)\cdot v(x)+C$ и

$\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx=\int u(x)\cdot v'(x)\,dx+\int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$

Сравнивая правые части, получим приведенную выше формулу.

П р и м е р 1. Найти $\int e^x x\,dx$. Обозначим $x=u(x), v'(x)=e^x$. Тогда $v(x)=e^x,\ u'(x)=1$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int e^x x\,dx=x\cdot e^x-\int e^x\,dx=e^x(x-1)+C.$$

П р и м е р 2. Найти $\int(\ln x)^2dx$. В этом примере мы применим метод интегрирования по частям дважды:

$$\int (\ln x)^2 dx = \left| \begin{matrix} u = (\ln x)^2, u' = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}, \\ v' = 1, v = x \end{matrix} \right| = x \cdot (\ln x)^2 - 2\int \ln x \frac{x}{x} dx =$$

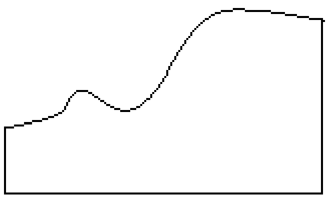
$$= x \cdot (\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x, u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1, v = x \end{matrix} \right] = x \cdot (\ln x)^2 - 2(x \ln x - \int \frac{x}{x} dx) =$$

$$= x \cdot (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C.$$

ИНТЕГРАЛ РИМАНА

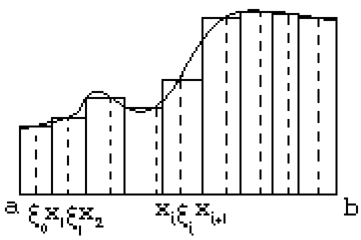
Площадь криволинейной трапеции

Представим, что мы должны подсчитать площадь земельного участка, изображенного на рисунке.



Такая фигура, ограниченная с трех сторон отрезками прямых, два из которых перпендикулярны третьему, а четвертая сторона пересекается прямой, перпендикулярной противоположному отрезку, только в одной точке, называется криволинейной трапецией. Очевидно, что любая плоская фигура может быть разбита на конечное число криволинейных трапеций. Будем считать, что прямолинейные участки сторон нашей криволинейной трапеции так же, как на рисунке, параллельны координатным осям. В этом случае можно нижний отрезок считать отрезком оси абсцисс, где $a \le x \le b$, и точки криволинейного участка задать с помощью непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$.

Для того, чтобы найти площадь криволинейной трапеции, заменим трапецию объединением прямоугольников по следующей схеме.



Отрезок $[a,b]$ разделен на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,...,n$, где $x_0=a$, $x_n=b$. На каждом отрезке выбрана точка ξ_i и в этой точке восстановлен перпендикуляр (прерывистая линия) до пересечения с кривой $y=f(x)$. Таким образом, вершиной перпендикуляра является точка с координатами $(\xi_i, f(\xi_i))$. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ как на основании построен прямоугольник высотой $f(\xi_i)$. Очевидно, что чем меньше отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, тем меньше площадь прямоугольника отличается от площади криволинейной трапеции с основанием $[x_i, x_{i+1}]$. Обозначим Δ длину наибольшего из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Δ называется **диаметром разбиения**. Чем меньше диаметр разбиения, тем ближе сумма площадей построенных прямоугольников к площади исходной криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$.

Итак, за приближенное значение площади исходной криволинейной трапеции возьмем $\sigma(f,R,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$. Здесь R означает способ выбора точек разбиения x_i, ξ – выбор отмеченных точек ξ_i. Введенная сумма называется интегральной суммой Римана. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma(f,R,\xi)=I$, причем этот предел не зависит ни от R, ни от ξ, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а сам предел называется **интегралом Римана по отрезку** и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Этот интеграл и будет равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной кривой $y=f(x)$.

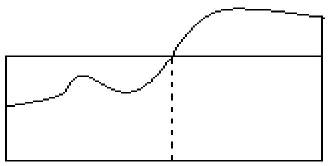
Любая **непрерывная** на отрезке функция является **интегрируемой** на этом отрезке.

Пока непонятно, почему площадь криволинейной трапеции назвали **интегралом** – так же, как множество первообразных. Не видно связи между этими объектами. Тем не менее, связь есть. Отметим пока очевидные свойства интеграла Римана, следующие из свойств сумм и пределов.

1. Линейность. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, α и β – произвольные постоянные, то функция $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем $\int\limits_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

2. Аддитивность. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $c\in[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$. Следствием этой формулы можно считать соотношение $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. То есть, замена направления интегрирования приводит к замене знака у интеграла.

3. Теорема о среднем. Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(b-a)$. То есть, существует равновеликий криволинейной трапеции прямоугольник на том же основании с высотой, равной значению функции в промежуточной точке.



Формула Ньютона-Лейбница

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Если $\Phi(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Последняя формула, называемая формулой Ньютона-Лейбница, как раз обеспечивает связь между интегралом Римана (его еще называют **определенным интегралом**) и первообразными. Формулу Ньютона-Лейбница еще записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

где вертикальная черта и индексы обозначают разность значений функций, соответственно, при верхнем и нижнем значениях переменной.

Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Просматривая математические тексты, нетрудно наткнуться на выражения вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$ или $\int_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx$. С точки зрения введенного нами понятия интеграла Римана по отрезку приведенные интегральные выражения представляются бессмыслицей. Действительно, мы не сможем составить ни одной интегральной суммы, так как никогда не кончим разбивать бесконечный промежуток на конечные отрезки и выбирать на них отмеченные точки. И тем

более, мы не сможем рассматривать последовательности интегральных сумм, соответствующих последовательностям таких разбиений с диаметрами разбиений, стремящимся к нулю. Что же понимают под такими интегралами?
Приведенные интегралы называются **несобственными интегралами по бесконечному промежутку** и определяются они при помощи интегралов Римана по конечным отрезкам следующим образом.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[\beta, b]$, $b > \beta$. То есть для любого $b > \beta$ существует $I(b) = \int_{\beta}^{b} f(x)\,dx$. Если существует конечный предел $\lim_{b\to+\infty} I(b)$, то такой предел обозначают $\int_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx$ и говорят, что этот несобственный интеграл сходится. Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что соответствующий несобственный интеграл расходится.

П р и м е р. Исследуем сходимость интеграла $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} dx$. Очевидно, что $I(b) = \frac{b^{1-\nu} - 1}{1-\nu}$ при $\nu \neq 1$ и $I(b) = \ln b$ при $\nu = 1$. Устремим теперь b к $+\infty$. Очевидно, что конечный предел функции $I(b)$ существует только при $\nu > 1$. Он равен $\frac{1}{\nu - 1}$. При $\nu \le 1$ предел $I(b)$ бесконечен. Таким образом, несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} dx$ сходится только при $\nu > 1$, причем $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} dx = \frac{1}{\nu - 1}$. При $\nu \le 1$ несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} dx$ расходится.

Основные понятия и теоремы теории вероятностей

В теории вероятностей изучаются возможные исходы опыта – **случайные события**, то есть, события, которые могут произойти или не произойти. Классический пример опыта – бросание монет. Например, при одновременном бросании двух монет (опыт) могут произойти следующие события: «выпало два герба», «выпал хотя бы один герб», «выпали две цифры», «монеты упали одинаковыми сторонами», «выпал один герб и одна цифра».

Событие называют **достоверным** (обозначают E), если оно обязательно происходит в результате опыта. Например, в приведенном опыте достоверным является событие: «выпал хотя бы один герб или хотя бы одна цифра».

Событие называют **невозможным** (обозначают $\varnothing$), если оно не может произойти в результате опыта. В рассмотренном опыте невозможным является событие: «выпало три герба».

Два события называют **несовместными**, если они не могут одновременно произойти в результате опыта. В рассмотренном примере события «выпало два герба» и «монеты упали разными сторонами» являются несовместными.

Говорят, что **событие A благоприятствует событию B** (обозначают $A \subset B$), если из того, что произошло событие A следует, что произошло событие B. В случае опыта с бросанием двух монет событие «выпало две цифры» благоприятствует событию «выпала хотя бы одна цифра».

Множество событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате опыта обязательно происходит, а любые два из которых несовместны, называется **множеством исходов** опыта (или множеством элементарных событий, или полной группой событий). В случае бросания двух монет множеством исходов являются события: «выпало два герба», «выпали две цифры», «выпал один герб и одна цифра». Заметим, что множество исходов может определяться неоднозначно, ведь множеством исходов того же опыта являются события: «монеты упали одинаковыми сторонами» и «монеты упали разными сторонами». Мы видим, что первое множество исходов содержит два события («выпало два герба», «выпали две цифры»), благоприятствующих событию «монеты упали одинаковыми сторонами» из второго множества исходов. А третье событие первого множества исходов («выпал один герб и одна цифра») совпадает со вторым событием второго множества исходов («монеты упали разными сторонами»).

Очень удобно изображать события так же, как изображают множества. Несовместные события изображаются непересекающимися множествами, событие, благоприятствующее другому событию, изображается подмножеством этого другого события. Достоверное событие E, которое обязательно происходит в результате опыта, является аналогом универсума, то есть содержит все множества, соответствующие исходам опыта. Пустому множеству соответствует невозможное событие.

Так же, как в случае множеств, для событий вводятся операции объединения ($A \cup B$) – событие, состоящее в том, что произошло или событие A, или событие B, и операция пересечения ($A \cap B$) – событие, состоящее в том, что одновременно произошли события A и событие B. Операция разности событий $A \setminus B$ представляет собой событие, состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло событие B. Аналогично операции дополнения множества вводится понятие противоположного события: $\bar{A}=E\setminus A$.

Возможно следующее определение **математической вероятности события**: это числовая характеристика степени возможности наступления события в определенных, могущих повториться неограниченное число раз условиях. Это означает, что если вероятность события охарактеризовать числом p, то при проведении опыта n раз при достаточно большом n данное событие произойдет примерно np раз, причем чем больше n, тем ближе количество наступлений события к числу np. Очевидно, что получить вероятность события можно при достаточно большом числе опытов как отношение $\frac{m}{n}$, где m – количество наступлений события, n – количество опытов. Из определения очевидно, что вероятность $p=\frac{m}{n}$ не может быть больше 1 и меньше 0. Очевидно также, что вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события равна 0.

Проще всего определять вероятность событий, когда множество исходов опыта представляет собой несколько равновероятных событий. Так, в случае бросания неповрежденной монеты множество исходов состоит из двух равновероятных событий: «выпадение герба» и «выпадение цифры». Поскольку «выпадение герба или цифры» – это достоверное событие с вероятностью 1 и события несовместны, то при многочисленных бросаниях вследствие симметричности монеты примерно половина исходов даст герб, а другая половина цифру. Следовательно, вероятность выпадения герба, как и вероятность выпадения цифры, равна $\frac{1}{2}$. Аналогично определяется вероятность выпадения числа от 1 до 6 при бросании игральной кости: в силу симметричности кости вероятность выпадения всех чисел одинаковая и равна $\frac{1}{6}$.

В случае равновероятных исходов вероятностью события A называется число $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – число всевозможных исходов, а m – число исходов, благоприятствующих событию A.

Пример. Пусть опыт состоит в однократном бросании игральной кости, а событие A – выпадение нечетного числа. Всего исходов 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6), из них 3 благоприятствуют событию A (1,3,5). Таким образом, $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Пример. Вернемся к нашему опыту бросания двух монет. Вычислим вероятности событий, составляющих множество исходов: A_1 – «выпало два герба», A_2 – «выпали две цифры», A_3 – «выпал один герб и одна цифра». Если каждое из первых двух событий соответствует одному исходу: одновременное выпадение либо гербов, либо цифр у монет, условно названных первой и второй, то событию A_3 благоприятствуют следующие исходы: «герб на первой монете и цифра на второй» и «цифра на первой монете и герб на второй». Таким образом, если сосчитать равновероятные исходы с учетом номера монет, то их 4: ЦЦ, ГГ, ГЦ, ЦГ. Следовательно, $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{4}$, $P(A_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Большую роль в решении задач об опытах с равновероятными исходами играют комбинаторные функции.

Пример. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров, из них 12 белых и 8 черных. Наудачу вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что оба они белые?

Определим число возможных исходов выбора двух шаров из 20. Это $C_{20}^2=\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}$. Благоприятных исходов $C_{12}^2=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}$. Таким образом, вероятность выбора двух белых шаров равна $\frac{33}{95}\approx 0{,}35$.

Часто для вычисления вероятностей пользуются **теоремой сложения**, согласно которой $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. В частности, если события A и B несовместны, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Следствием теоремы сложения является формула $P(A)=1-P(\bar{A})$.

Пример. Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку – с вероятностью 0,2, в восьмерку – с вероятностью 0,6. Какова вероятность при одном выстреле выбить не менее восьми очков?

Интересующее нас событие является объединением попарно не пересекающихся событий : «выбито 8 очков», «выбито 9 очков» и «выбито 10 очков». Следовательно, в соответствии с теоремой сложения для вычисления требуемой вероятности следует сложить вероятности всех этих событий и получить 0,85.

Пример. В ящике лежат 8 белых и 12 красных одинаковых на ощупь шаров. Какова вероятность, вынимая наугад 3 шара, вынуть хотя бы один белый?

В данном случае можно сосчитать вероятности вынуть 3 белых, 2 белых и один красный и 1 белый и 2 красных шара, а затем сложить полученные величины. Однако рациональнее сосчитать вероятность противоположного события – вероятность вынуть три красных шара. Итак, $P(\bar{A})=\dfrac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\dfrac{11}{57}$. Следовательно, $P(A)=1-P(\bar{A})\approx 0{,}8$.

Пусть два события A и B **независимы**, то есть, от того, произойдет или нет одно из них, не зависит наступление второго. Для независимых событий определяют вероятность пересечения событий как $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Пример. Два самолета сбрасывают по бомбе на вражеский объект. Объект считается уничтоженным, если в него попали две бомбы. Какова вероятность уничтожить объект, если вероятность попадания первого самолета 0,8, а второго – 0,75?

Очевидно, что если летчик не отслеживает попадание в цель товарища и не укрепляет (или ослабляет) тем самым свой моральный дух, попадание бомб из разных самолетов в цель – взаимно независимые события. Поэтому вероятность одновременного попадания в цель равна $0{,}8\cdot 0{,}75=0{,}6$.

Пример. В условиях предыдущего примера следует подсчитать вероятность попадания в цель хотя бы одного летчика.

Благоприятными для наступления интересующего нас события являются следующие исходы: «попали оба», «первый попал, второй не попал», «первый не попал, второй попал». Вероятность первого из исходов 0,6, вероятность второго $0{,}8\cdot 0{,}25=0{,}2$, вероятность третьего $0{,}2\cdot 0{,}75=0{,}15$. Поэтому вероятность попадания хотя бы одного летчика равна $0{,}95$. В соответствии со следствием из теоремы сложения тот же результат мы получим, подсчитав вероятность противоположного события «в цель не попали оба летчика» $(0{,}2\cdot 0{,}25=0{,}05)$ и вычтя полученный результат из единицы.

В ряде случаев возникает вопрос: что можно сказать о вероятности события A, если известно, что произошло событие B? Вероятность при этом обозначается $P(A|B)$ и читается «вероятность A при условии B». Если события A и B несовместны, то $P(A|B)=0$, то есть A– невозможное событие при наступлении события B. Если, наоборот, $B\subset A$, то $P(A|B)=1$, то есть, при $B\subset A$ событие A при условии B – достоверное событие. Для случаев, когда при условии B событие A может как наступить, так и не наступить, вводят понятие **условной вероятности,** вычисляемой по формуле: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Рассмотренные нами случай несовместных событий и случай $B\subset A$ согласуются с данной формулой.

В случае равновероятных исходов опыта формула условной вероятности имеет вид $P(A|B)=\frac{k}{m}$, где m – число исходов, благоприятных для события B, и k из них благоприятствуют событию A.

Пример. Найти вероятность того, что при бросании игрального кубика выпало число 3, если известно, что выпавшее число нечетное.

Число исходов, благоприятных для выпадения нечетного числа, равно 3 (1, 3, 5). Из этих исходов только один благоприятен выпадению числа 3. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Проверим, чему равна условная вероятность $P(A|B)$, если события A и B независимы. Согласно определению вероятности пересечения независимых событий

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$. Этот результат, несомненно, соответствует интуитивному представлению о том, что если события A и B независимы, то на вероятность наступления события A никак не влияет, произошло событие B или не произошло.

Условная вероятность используется для вычисления вероятности наступления события при известных вероятностях исходов опыта и условных вероятностях наступления события при каждом исходе. Справедлива следующая теорема.

Пусть $A_1, A_2, ..., A_m$ *– множество исходов некоторого опыта (то есть* $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$*, и* $A_1\cup A_2\cup ...\cup A_m=E$*). Тогда* $P(B)=\sum_{i=1}^{m}P(B\,|\,A_i)\cdot P(A_i)$.

Последняя формула называется **формулой полной вероятности**.

Пример. По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле 0,5, при втором 0,6, при третьем 0,8. При одном попадании самолет будет сбит с вероятностью 0,3, при двух попаданиях с вероятностью 0,6, при трех самолет будет сбит наверняка. Какова вероятность того, что самолет будет сбит?

Событием B является событие «самолет сбит». Множество исходов при трех выстрелах – это события: A_1 – «попадания при всех трех выстрелах», A_2 – «два попадания и один промах», A_3 – «одно попадание и два промаха», A_4 – «три промаха». Имеем $P(B\,|\,A_1)=1$, $P(B\,|\,A_2)=0{,}6$,

$P(B|A_3)=0,3,\ P(B|A_4)=0$. Теперь нужно подсчитать $P(A_i),\ i=1,2,3,4$.
Используя независимость попаданий, получим $P(A_1)=0,5\cdot 0,6\cdot 0,8=0,24$.
Событие A_2 – это объединение трех несовместных событий: «попадание при первых двух выстрелах и промах при третьем», «попадание при первом и третьем выстрелах и промах при втором» и «промах при первом выстреле и попадание при двух следующих». Поэтому
$P(A_2)=0,5\cdot 0,6\cdot 0,2+0,5\cdot 0,4\cdot 0,8+0,5\cdot 0,6\cdot 0,8=0,46$.
Аналогично считается вероятность третьего исхода:
$P(A_3)=0,5\cdot 0,6\cdot 0,2+0,5\cdot 0,4\cdot 0,8+0,5\cdot 0,4\cdot 0,2=0,26$. Очевидно, что в силу независимости промахов $P(A_1)=0,5\cdot 0,4\cdot 0,2=0,04$. В результате применения формулы полной вероятности получим
$P(B)=1\cdot 0,24+0,6\cdot 0,46+0,3\cdot 0,26+0\cdot 0,04=0,594$.

Представим, что нас интересует не столько событие, происшедшее в результате опыта, а то, при каком исходе из множества всех исходов это событие произошло. Назовем при этом множество исходов множеством **гипотез.**

Пример. Одинаковые детали производятся в трех цехах. В первом цехе 50% всех деталей, во втором цехе 30% и в третьем цехе 20%. Вероятность выпуска бракованной детали в 1-м цехе 0,02 во втором и третьем по 0,01 (видимо, там стоят более современные, чем в первом цехе, станки). К работникам ОТК попала бракованная деталь. Следует узнать вероятность того, что бракованная деталь из третьего цеха.
Итак, событием в данном опыте является событие A– «появление бракованной детали». Гипотезами здесь являются исходы «деталь произведена в 1-м цехе», «деталь произведена во 2-м цехе» и «деталь произведена в 3-м цехе». Обозначим эти гипотезы H_1, H_2, H_3, соответственно. Очевидна вероятность исходов-гипотез по объему поступающей из цехов продукции: $P(H_1)=0,5,\ P(H_2)=0,3,\ P(H_3)=0,2$.
Известны также вероятности события A при каждой из гипотез:
$P(A|H_1)=0,02,\quad P(A|H_2)=P(A|H_3)=0,01$. Как же подсчитать $P(H_3|A)$?
Ответ на этот вопрос дает **теорема Байеса.**
Пусть $H_1,H_2,....,H_n$ *– полная группа событий. Тогда*
$$P(H_k|A)=\frac{P(A|H_k)\cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|H_i)\cdot P(H_i)}.$$
Применяя теорему Байеса, решим поставленную в примере задачу: подсчитаем вероятность того, что бракованная деталь из третьего цеха.
$$P(H_3|A)=\frac{0,01\cdot 0,2}{0,02\cdot 0,5+0,01\cdot 0,3+0,01\cdot 0,2}=\frac{0,002}{0,015}=0,133....$$

Многие задачи теории вероятностей сводятся к тому, что опыт проводится n раз независимым образом, причем наступление события A в одном опыте не влияет на наступление того же события в другом опыте. Если вероятность наступления события A в одном опыте равна p, то чему равна вероятность наступлений этого события m раз при n проведенных опытах ($m<n$)? **.** Так как при проведении n опытов событие произойдет m раз и не произойдет $(n-m)$ раз, то если мы зафиксируем, в каких опытах событие A произойдет, а в каких нет, из-за независимости наступления или отсутствия события мы должны получить $p^m(1-p)^{(n-m)}$. Но поскольку мы не знаем, в каких опытах событие произойдет, а в каких нет, мы должны просуммировать вероятности несовместных событий, отличающихся номерами опытов, в которых событие происходит. Число различных вариантов групп n опытов с m происшедшими событиями равно C_n^m. Поэтому ответ на поставленный вопрос дает **формула Бернулли:** $C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{(n-m)}$.

Пример. Какова вероятность того, что при десяти бросаниях игральной кости два раза выпадет 6? Здесь $p=\frac{1}{6}$, $C_n^m = C_{10}^2 = 45$. Следовательно, вероятность интересующего нас события $0,25 \cdot \frac{5^9}{6^8}$.

Заметим, что в соответствии с формулой бинома Ньютона сумма вероятностей наступления событий 0, 1, 2, …, n раз при проведении n опытов равна 1.

Задания.

1. В урне содержится 5 белых и 4 черных шара. 1) Вынимается наудачу один шар. Найти вероятность того, что он белый. 2) Вынимаются наудачу два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них черный.
2. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Найти вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.
3. Дано 6 карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что: а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки; б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются 6 карточек.

4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) сумма выпавших очков не превосходит 7; б) на обеих костях выпадает одинаковое число очков; в) произведение выпавших очков делится на 4; г) хотя бы на одной кости выпадет 6 очков.
5. Код домофона состоит из 8 цифр, которые могут повторяться. Какова вероятность того, что случайно набирая цифры, можно угадать нужный код?
6. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 6 цифр. Определить вероятность того, все 6 цифр различны.
7. Имеется 6 изделий: 4 из них первого сорта и 2 второго. Наудачу взяли 3 изделия. Найти вероятность того, что среди них только одно первого сорта.
8. Среди 12 студентов 7 отличников. Из группы отобрано наудачу 5 человек. Какова вероятность того, что среди них 3 отличника.
9. Среди 20 изделий 3 дефектных. Случайно из них отобрано 4 изделия. Найти вероятность того, что а) все отобранные годны; б) число годных и дефектных одинаково.
10. Каждый из двух стрелков делает по одному выстрелу в мишень. Пусть событие A – первый стрелок попал в цель, событие B – второй стрелок попал в цель. Что означают события: а) $A + B$; б) AB; в) $\overline{A}$.
11. Из корзины, содержащей красные, желтые и белые розы выбирается один цветок. Пусть события A – вынута красная роза, B – вынута желтая роза, C – вынута белая роза. Что означают события: а) $B + C$; б) $A + B$; в) AC; г) $\overline{A+B}$; д) $A+B+C$; е) $AB + C$?
12. Три студента независимо друг от друга решают задачу. Пусть событие A_1- первый студент решил задачу, событие A_2 – второй студент решил задачу, A_3 – третий студент решил задачу. Выразить через события A_i $(i=1,2,3)$ следующие события: 1) A – все студенты решили задачу; 2) B – задачу решил только первый студент; 3) C – задачу решил хотя бы один студент; 4) D – задачу решил только один студент; 5) E – с задачей не справился ни один студент; 6) F – задачу решило не более двух студентов.
13. Только один из 9 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что придется опробовать 5 ключей для открывания замка?
14. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз?

Случайные величины.

Случайной величиной называют функцию, заданную на множестве исходов конкретного опыта.

1. Дискретная случайная величина.

В простейшем случае, когда множество исходов опыта конечно, каждому исходу опыта E_k поставлено в соответствие единственное число x_k, которое и называется значением случайной величины на исходе E_k и представляется в виде $x_k = \xi(E_k)$. Если **все** значения случайной величины совпадают между собой, то говорят, что случайная величина есть постоянная.

Случайную величину, принимающую конечное число значений, задают таблицей:

Исходы	E_1	E_2	….	E_n
ξ	x_1	x_2		x_n

Примером случайной величины можно считать суммарное количество выпавших очков при одновременном бросании двух игральных кубиков. Очевидно, что число равновероятных исходов при опыте бросания двух кубиков равно 36. Значения, принимаемое случайной величиной, меняются от 2 до 12, причем, разным исходам могут соответствовать одинаковые значения. Например, значение 4 принимается при трех различных исходах: 1+3, 2+2 и 3+1.

Со случайными величинами обращаются так же, как с обычными числовыми функциями: можно складывать две случайные величины ξ и η (то есть строить новую случайную величину, задавая таблицу с суммами соответствующих значений при всех исходах), умножать случайную величину на число, умножать и делить случайные величины друг на друга.

Для изучения случайной величины вводят ее числовые характеристики.

Математическим ожиданием случайной величины ξ в опыте с n равновероятными исходами называется число $M\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$. То есть, математическое ожидание – это среднее значение случайной величины.

Очевидно следующие из определения свойства математического ожидания:

$$M(a\xi + b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b) = a \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + b = a \cdot M\xi + b,$$

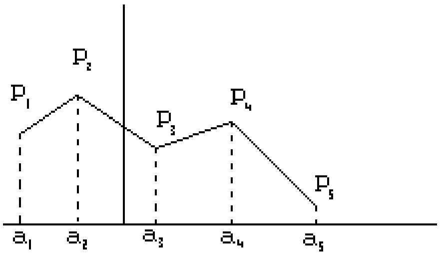
$$M(\sum_{j=1}^{r}\xi_j) = \sum_{j=1}^{r} M\xi_j .$$

В данном выше определении математического ожидания очень существенно то, что исходы $E_k,\ k = 1,\dots,n,$ равновероятны. Представим теперь, что изучаемая нами случайная величина принимает в результате n исходов l значений $a_j,\ j = 1,\dots,l,$ где $l < n$. Это означает, что какие-то из значений a_j принимаются в результате нескольких равновероятных исходов. Объединим те исходы E_k, которые соответствуют значению a_j в событие $A_j,\ j = 1,\dots,l$. Очевидно, что события $A_j,\ j = 1,\dots,l$, попарно несовместны. Если обозначить через m_j количество равновероятных исходов E_k, соответствующих значению a_j, то мы получим следующее определение математического ожидания: $M\xi = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} a_j \cdot m_j$. А теперь заметим, что $\frac{m_j}{n} = p(A_j)$. Таким образом, мы получили **новое определение математического ожидания**: пусть полной группой исходов опыта являются события $A_1, A_2, \dots, A_l$ с вероятностями $p(A_j) = p_j,\ j = 1,\dots,l$, причем случайная величина ξ в результате исхода A_j принимает значение a_j и все значения $a_j,\ j = 1,\dots,l,$ различны. Тогда $M\xi = \sum_{j=1}^{l} a_j \cdot p_j$.

Таким образом, для вычисления математического ожидания случайной величины недостаточно знать только значения величины при различных исходах, необходимы также вероятности событий, обеспечивающих различные значения случайной величины. Поэтому целесообразно задавать таблицу, в которой указываются различные значения случайной величины, а также вероятности соответствующих исходов:

ξ	a_1	a_2	$\dots$	a_l
P	p_1	p_2	$\dots$	p_l

Построенная нами таблица называется законом (рядом) **распределения дискретной случайной величины** ξ**.** Заметим, что сумма вероятностей, находящихся в нижней строке приведенной таблицы равна 1. Для наглядности закон распределения задают графически: на оси OX откладывают всевозможные значения случайной величины ξ, а над каждым значением (вдоль оси OY) помещают соответствующую вероятность. Соединяя полученные точки отрезками, мы получим **многоугольник (полигон) распределения**.



Пример. Стрелок стреляет пять раз по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле 0,8. Найти закон распределения случайной величины «число попаданий стрелка в результате всех выстрелов».

Данная случайная величина принимает 6 значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Подсчитаем вероятность каждого из исходов с применением формулы Бернулли. Значение 0 величина примет с вероятностью $0,2^5$. Значение 1 – с вероятностью $C_5^1 \cdot (0,2)^4 \cdot 0,8 = 0,0064$, значение 2 – с вероятностью $C_5^2 \cdot (0,2)^3 \cdot (0,8)^2 = 0,0512$, значение 3 – с вероятностью $C_5^3 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^3 = 0,2048$, значение 4 – с вероятностью $C_5^4 \cdot 0,2 \cdot (0,8)^4 = 0,4096$ и значение 5 – с вероятностью $(0,8)^5 = 0,32768$.

Построим закон распределения

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Задание. Постройте многоугольник распределения рассмотренной случайной величины.

Найдем математическое ожидание данной величины.
$M\xi = 0 + 0,0064 + 2 \cdot 0,0512 + 3 \cdot 0,2048 + 4 \cdot 0,4096 + 5 \cdot 0,32768 = 4.$

В соответствии с определением независимых событий две дискретные случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если

при любых i и j выполняется равенство
$P((\xi=a_i)\cap(\eta=b_j))=P(\xi=a_i)\cdot P(\eta=b_j)$. Для независимых случайных величин характерно свойство $M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\cdot M(\eta)$.

Если математическое ожидание дает нам значение, вокруг которого разбросаны значения случайной величины, то новая характеристика, называемая **дисперсией** характеризует степень разброса значений случайной величины. Для **вычисления дисперсии** применяется формула $D\xi=M(\xi-M\xi)^2$.

Найдем дисперсию случайной величины из предыдущего примера. Случайная величина $\xi-M\xi$ принимает значения -4, -3, -2, -1, 0, 1 с вероятностями 0,00032, 0,0064,
0,0512, 0,2048, 0,4096 и 0,32768, соответственно. Следовательно, величина $(\xi-M\xi)^2$ принимает значения 16, 9, 4, 1, 0 с вероятностями 0,00032, 0,0064, 0,0512, 0,53248 и 0,4096, соответственно. Поэтому $D\xi=16\cdot0{,}00032+9\cdot0{,}0064+4\cdot0{,}0512+0{,}53248$=0,8.
Для вычисления дисперсии иногда удобно пользоваться формулой $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$. Докажем, что эта формула следует из формулы, определяющей дисперсию. Используя
определение математического ожидания и то, что $\sum_{j=1}^{l}p_j=1$, получим

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2=\sum_{j=1}^{l}(a_j-M\xi)^2p_j=\sum_{j=1}^{l}a_j^2p_j-2M\xi\sum_{j=1}^{l}a_jp_j+$$
$$+(M\xi)^2\sum_{j=1}^{l}p_j=M\xi^2-(M\xi)^2.$$

Нетрудно заметить, что $D(k\cdot\xi)=k^2\cdot D\xi$.

Часто при анализе каких-то процессов приходится выяснять, зависимы ли две случайные величины. Мы уже знаем, что в случае независимости $M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\cdot M(\eta)$. Но если последнее равенство не выполняется, то можно оценить степень зависимости между случайных величин. Для этого служит **коэффициент корреляции**, вычисляемый по формуле $r(\xi,\eta)=\dfrac{M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta)}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}}$. Коэффициент корреляции обладает свойством $|r(\xi,\eta)|\le1$. Очевидно, что коэффициент корреляции двух независимых величин равен нулю. Если же две случайные величины связаны линейно, то есть, $\eta=a\cdot\xi+b$, то $|r(\xi,\eta)|=1$.

Справедливо следующее свойство независимых величин: если величины ξ и η независимы, то $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$.

Задания.

1.Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	1	2	3
p_i	0,08	0,4	0,32	0,2

1) Построить многоугольник распределения; 2) найти вероятности событий $A = (X<2)$; $B = (1\leq X<3)$; $C = (1<X\leq 3)$; 3) найти $M(X)$; 4) найти $D(X)$.

2. Случайная величина Y задана рядом распределения:

y_i	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3
p_i	0,1	0,2	C	0,3	0,1

1) Найти значение $P(Y = 1,7)$; 2) построить многоугольник распределения; 3) найти вероятности $P(Y>1,4)$, $P(1,4\leq Y\leq 2,3)$; 4) найти $M(Y)$; 5) найти $D(Y)$.

3.Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,4	0,3	C

Найти: 1) C, 2) $M(X)$, 3) $D(X)$, 4) $P(X<3)$.

2. Непрерывная случайная величина.

В случае, когда значения случайной величины непрерывны, например, заполняют целиком интервал, невозможно задавать случайную величину в виде таблицы с конечным числом исходов. Примером непрерывной случайной величины является рост трехлетнего ребенка. Опыт состоит в измерении роста ребенка. Исход опыта – измерение роста конкретного ребенка. Очевидно, что нельзя установить конечное число возможных исходов, можно лишь указать диапазон значений роста по результатам многолетних наблюдений.

Для непрерывной случайной величины вводится функция распределения. По аналогии с законом распределения для дискретной величины **функция распределения непрерывной случайной величины** – это вероятность, но не вероятность того, что случайная величина принимает конкретное значение, а вероятность того, что случайная величина принимает значения, меньшие данного: $F(x) = P(\xi < x)$.

Если ввести такую же функцию распределения для дискретной величины, то эта функция окажется ступенчатой. Так, в последнем примере со стрелком $F(x) = 0$ при $x \le 0$, $F(x) = 0{,}00032$ при $0 < x \le 1$, $F(x) = 0{,}00672$ при $1 < x \le 2$, $F(x) = 0{,}05792$ при $2 < x \le 3$, $F(x) = 0{,}26272$ при $3 < x \le 4$, $F(x) = 0{,}67232$ при $4 < x \le 5$, $F(x) = 1$ при $x > 5$.

Поскольку функция распределения является вероятностью, ее значения расположены в диапазоне [0,1], при увеличении значений аргумента x вероятность $P(\xi < x)$ уменьшиться не может, так как множество возможных значений случайной величины ξ расширяется. Поэтому функция $F(x)$ неубывающая, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. Приведенный пример функции распределения дискретной величины подтверждает эти рассуждения.

В случае непрерывной случайной величины график функции распределения – непрерывная кривая. Если функция $F(x)$ дифференцируема, то ее производная $p(x) = F'(x)$ называется **плотностью распределения.** Вследствие неубывания функции распределения $p(x) \ge 0$. Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что $\int\limits_a^b p(x)dx = F(b) - F(a) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = P(a \le \xi < b)$. Следовательно, в соответствии с геометрическим смыслом интеграла, вероятность того, что случайная величина принимает значения на полуинтервале $[a,b)$, равна площади криволинейной трапеции с основанием $[a,b)$, ограниченной сверху кривой $y = p(x)$. Очевидно, что площадь криволинейной трапеции не изменится, если в ее основании полуинтервал $[a,b)$ заменить на отрезок $[a,b]$ или на интервал (a,b). То есть,

$$P(a \le \xi < b) = P(a \le \xi \le b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \le b) = \int\limits_a^b p(x)dx.$$

Заметим, что для непрерывной случайной величины, в отличие от дискретной случайной величины, вероятность того, что величина принимает какое-то конкретное значение, равна нулю. Действительно,

$$P(\xi = x_0) = \lim_{\delta \to 0} P(x_0 - \delta \le \xi \le x_0 + \delta) = \lim_{\delta \to 0}(F(x_0 + \delta) - F(x_0 - \delta)) = F(x_0) - F(x_0) = 0.$$

Очевидно, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \lim\limits_{M \to \infty} \int\limits_{-M}^{M} p(x)dx = \lim\limits_{M \to \infty}(F(M) - F(-M)) = 1$ и

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

Математическое ожидание для непрерывной случайной величины ξ с дифференцируемой плотностью распределения определяется как $M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)dx$.

Дисперсия непрерывной случайной величины так же, как и для дискретной случайной величины определяется как $M(\xi - M\xi)^2$ и также выражается с помощью интеграла в случае дифференцируемой функции распределения.

Две непрерывные случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если для любой пары промежутков I и J справедливо: $P((\xi \in I) \cap (\eta \in J)) = P(\xi \in I) \cdot P(\eta \in J)$. Так же как в случае дискретных величин имеет место соотношение $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$.

Задания.

1. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 3, \\ \dfrac{1}{4}(x-3)^2, \text{при } 3 \le x \le 5, \\ 1, \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

Найти: 1) Плотность распределения $p(x)$; 2) $P(x \in (3;4)$.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, \text{при } x \ge 1, \\ 0, \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Найти 1) Функцию распределения F(x); 2) $P(1 < x < 5)$.

3. Задана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ ax^2, \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1, \text{при} 1 < x. \end{cases}$$

Определить:1) при каком значении a функция $F(x)$ будет функцией распределения некоторой случайной величины X; 2) плотность вероятности ; 3) вероятность события D=$\left\{-\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}\right\}$.

4. Дана плотность распределения вероятностей случайной величины X:

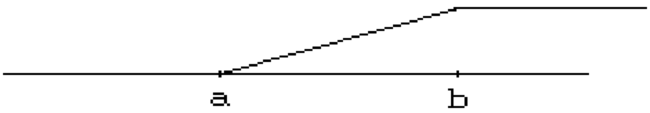
$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x < 0, \\ \dfrac{1}{8} \cdot x, \text{при } 0 \le x < 4, \\ 0, \text{при } 4 \le x. \end{cases}$$

Найти $M(X); D(X); \sigma(X)$.

5. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X с плотностью вероятности $f(x) = \frac{1}{2}x$ при $x \in [0;2]$ и $f(x) = 0$ для остальных x.

3. Примеры законов распределения случайных величин.

1) Равномерное распределение. Непрерывное распределение с плотностью, постоянной на некотором участке $[a,b]$ и равной нулю всюду кроме этого участка, называется равномерным распределением. Из соотношения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{a}^{b} pdx = 1$ имеем постоянное значение плотности на участке $[a,b]$: $p = \frac{1}{b-a}$. В соответствии с формулой $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$ имеем следующий график функции равномерного распределения:

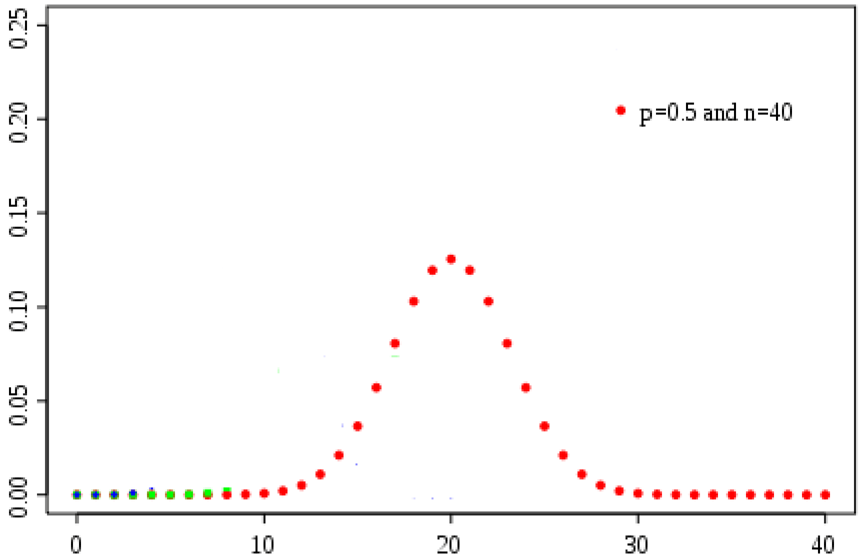


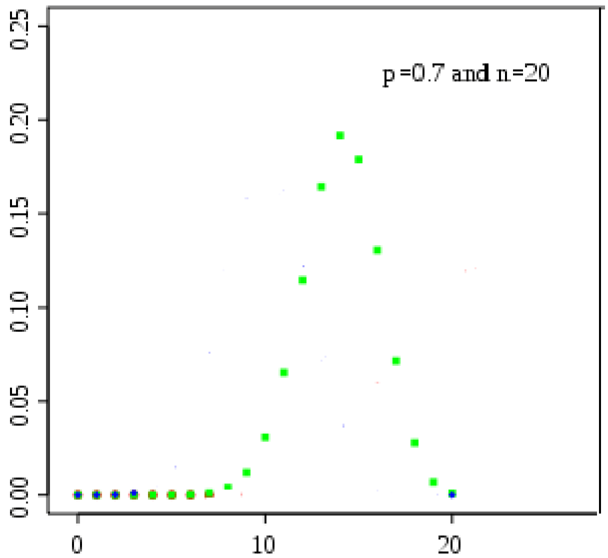
Вычислим характеристики равномерного распределения:

$$M\xi = \int\limits_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2},$$

$$D\xi = \int\limits_{a}^{b} (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2) Биномиальное распределение. Дискретная случайная величина, принимающая только целые неотрицательные значения, не большие числа n, с вероятностями $P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$, называется распределенной по биномиальному закону. Заметим, что приведенная величина фигурировала в формуле Бернулли, которая давала вероятность наступления события в k опытах из n, если вероятность наступления события в одном опыте равна p. Характеристики распределения таковы: $M\xi = n \cdot p$, $D\xi = n \cdot p \cdot (1-p)$. На двух следующих графиках заданы законы распределения с $p = 0,5$, $n = 40$ и с $p = 0,7$, $n = 20$, соответственно.



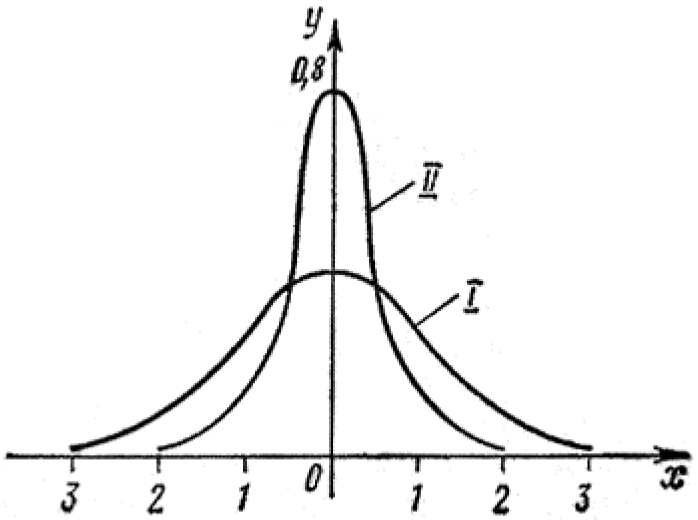


3) Нормальный закон распределения Гаусса. Этот закон распределения непрерывной случайной величины очень часто применим, поэтому остановимся на нем подробнее.

Если для дискретной величины, распределенной по биномиальному закону, построить зависимость вероятности $P(\xi = k)$ от значения k, мы заметим, что с ростом k при $k \le n \cdot p + p - 1$ вероятность монотонно возрастает, а при $k > n \cdot p + p - 1$ с ростом k вероятность монотонно убывает, достигая наибольшего значения при значениях, близких к математическому ожиданию $n \cdot p$. Это можно проследить на приведенных выше двух графиках законов биномиального распределения. Нечто подобное можно наблюдать и при построении подобной зависимости для дискретной величины, распределенной по закону Пуассона.

Аналогом закона распределения дискретной случайной величины в случае непрерывной случайной величины является плотность распределения. Естественно иметь такой закон распределения непрерывной случайной величины, плотность которого достигает наибольшего значения при значениях случайной величины, равных математическому ожиданию этой величины.

Непрерывная случайная величина называется распределенной по **нормальному закону**, если ее плотность вероятности равна $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0.$ График плотности распределения – кривая, симметричная относительно точки $x=m$, монотонно возрастающая от нуля ($p(x)\underset{x\to-\infty}{\to}0$) при $x<m$ и монотонно убывающая к нулю ($p(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$) при $x>m$. На приведенном ниже рисунке совмещены графики плотностей двух нормальных распределений. График I соответствует значениям параметров $m=0,\ \sigma=1$, а график II – значениям параметров $m=0,\ \sigma=\frac{1}{2}$.



Коэффициент при экспоненциальной функции подобран таким, чтобы выполнялось условие $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$. (При вычислении интеграла от плотности используется значение интеграла Эйлера-Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$).

Функция распределения величины, распределенной по нормальному закону, можно задать следующим образом:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{(x-m)/\sigma}e^{-\tau^2/2}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\tau^2/2}d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{(x-m)/\sigma}e^{-\tau^2/2}d\tau=\frac{1}{2}+\Phi(\frac{x-m}{\sigma}),$$

где функция $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\tau^2/2}d\tau$ называется функцией Лапласа.

Функция Лапласа задается таблично, как и многие известные функции (тригонометрические функции, экспоненциальная функция и логарифмическая функция). Это монотонно возрастающая, нечетная функция, $\Phi(+\infty)=\frac{1}{2}$.

Если случайная величина ξ имеет распределение по нормальному закону, то $P(a<\xi<b)=\Phi(\frac{b-m}{\sigma})-\Phi(\frac{a-m}{\sigma})$. Математическое ожидание этой случайной величины равно $M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x)dx=m$. Дисперсия той же величины равна $D\xi=\sigma^2$.

Замечательным свойством нормального закона является следующее: если независимые случайные величины распределены по нормальному закону, то их сумма также распределена по нормальному закону.

Задания

1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины ξ соответственно равны 10 и 2 найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в интервале (12; 14).

2. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение порога восприятия звукового сигнала в серии опытов $m_\xi = 40$ (в условных единицах), дисперсия $D_\xi = 100$. Вычислить вероятность того, что в данном испытании порог будет заключен в интервале (30; 80), считая распределение порога нормальным.

3. Пусть случайная величина ξ «центрированная», т.е. $m_\xi = 0$. Известно, что $\sigma_\xi = 5$. Найти вероятность того, что ξ не превосходит по абсолютной величине значения 5.

4. Математическое ожидание m_ξ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ уровня уверенности ξ, распределенного по нормальному закону, соответственно равны 40 и 0,4. Какие значения данного показателя можно гарантировать с вероятностью 0,8.

4. Закон больших чисел.

Вероятностные закономерности выявляются при большом числе опытов и называются **законом больших чисел.** Наличие этих закономерностей связано с массовостью явлений, то есть с большим числом опытов или с большим числом случайных воздействий, приводящих к такой случайной величине, которая подчиняется вполне определенному и математически выверенному закону.

Так, справедлива следующая теорема, называемая **теоремой Чебышева**. *Если случайные величины* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...$ *попарно независимы и существует такая константа* $C > 0$, *что* $D\xi_k \le C,\ k \in N$, *то при любом* $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| \ge a\right) = 0 .$$

То есть, какие бы конкретные значения ни принимали попарно независимые случайные величины, с большой вероятностью за их среднее можно брать среднее их математических ожиданий.

Другим примером проявления закона больших чисел является **центральная предельная теорема**: *если последовательность попарно независимых случайных величин* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M\,|\,\xi_k - M\xi_k\,|^3}{\left(\sum_{k=1}^{n} D\xi_k\right)^{3/2}} = 0, \text{ то}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n}M\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}D\xi_k}} < b \right) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Заметим, что условие, приведенное в формулировке теоремы означает, что в сумме случайных величин ни одно из слагаемых не доминирует, то есть вклад каждой из случайных величин не подавляет вкладов других величин.

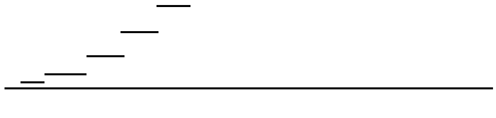
Элементы математической статистики

В предыдущем параграфе мы имели дело с законами распределения случайных величин как с чем-то заранее известным. На практике, когда мы пытаемся систематизировать наблюдения и опытные данные и делать на основании этих наблюдений прогнозы, мы должны получить все характеристики из опытов. При этом следует иметь в виду, что всякий эксперимент связан с ошибками измерений и наблюдений, и значит, характеристики, полученные из опытов, являются лишь приближенными величинами. Следует убедиться в надежности полученных результатов (то есть знать вероятность того, что результаты измерений имеют заданную точность).

Разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, полученных в результате наблюдения массовых случайных явлений, составляет предмет **математической статистики**. Основными задачами математической статистики являются 1) задача определения закона распределения случайной величины по статистическим данным, 2) задача выявления достоверности полученных параметров распределения, 3) задача проверки правдоподобия гипотезы о том, что случайная величина подчиняется выбранному закону распределения.

Для статистического анализа случайной величины мы производим **выборку**, то есть, измеряем не все значения случайной величины, а только часть случайно полученных значений. Тем более, что иногда опыт по измерению значений приводит к уничтожению объекта исследований. Так, измерение срока службы электрической лампочки имеет смысл только в том случае, если в итоге опыта лампочка придет в негодность.

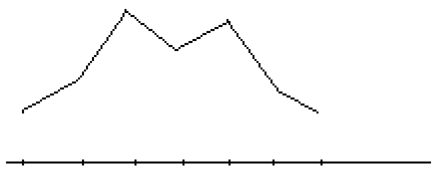
Предположим, что мы проводим анализ данных о росте трехлетних детей. При проведении опыта (измерении роста малышей) мы сначала записываем данные последовательно по мере их поступления (рост 1-го ребенка, рост 2-го ребенка,…). Следующий этап обработки статистических данных – построение **статистической функции распределения** исследуемой случайной величины. *Статистической функцией распределения случайной величины* ξ *называется частота события* $\xi < x$ *в полученном статистическом материале:* $F^*(x) = P^*(\xi < x)$. Здесь P^* – это частота, то есть, отношение числа полученных в результате опыта значений случайной величины, меньших значения x, к числу всех полученных значений. Мы получим неубывающую ступенчатую функцию, имеющую скачки в точках, соответствующих всем значениям случайной величины, полученным в результате опыта.



При увеличении числа опытов согласно закону больших чисел наша статистическая функция распределения приближается к подлинной функции распределения $F(x)$.

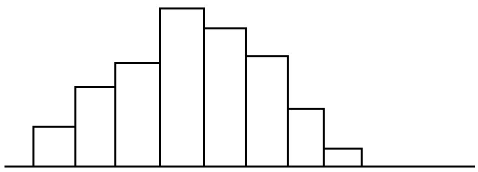
Аналогом закона распределения дискретной величины или плотности распределения непрерывной величины являются **полигон частот** и **гистограмма частот**.

Полигон частот мы получим, если каждому значению исследуемой величины, полученному в результате опыта, поставим в соответствие число наблюдений этого значения. Например, рост 1 м мы наблюдали у 7 детей, рост 1 м 1 см у 10 детей, рост
1м 2 см у 18 детей и т.д. На графике мы отложим значение $y = 7$ при значении $x = 100$, значение $y = 10$ при значении $x = 101$, значение $y = 18$ при $x = 102,\ldots$ Соединив точки графика отрезками прямых, мы получим многоугольник, который и называют полигоном частот. В случае, когда по вертикали мы откладываем не число наблюдений данного



значения, а отношение этого числа к числу всех измерений, мы получим **полигон относительных частот.**

В том случае, когда число данных, полученных в результате опыта, очень велико и расположены эти данные близко друг к другу, то есть случайная величина распределена практически непрерывно, прибегают к построению **гистограммы**. В отличие от полигона частот при построении гистограммы на оси x отмечают не отдельные значения, которые принимает случайная величина, а равные интервалы значений, а над каждым таким интервалом на высоте, равной количеству наблюденных значений случайной величины, попавших в этот интервал, помещают параллельный оси x отрезок.



Аналогом математического ожидания случайной величины при статистической обработке является среднее арифметическое полученных значений $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, называемое **эмпирическим математическим ожиданием** или **средним по выборке**. Здесь n – количество измерений, x_k – наблюдаемое значение случайной величины при k-м измерении. Аналогом дисперсии случайной величины при статистической обработке является **эмпирическая дисперсия**, вычисляемая по формуле

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x-\bar{x})^2$. Замена n на $n-1$ в знаменателе неслучайна, но объяснение этого не входит в нашу программу, поэтому ограничимся замечанием, что при больших значениях n такая замена несущественна.

После определения эмпирических параметров встает вопрос о точности оценок параметров выбранного распределения. Предположим, что θ – интересующий нас параметр распределения. На основании выборки находится интервал (θ_1, θ_2), в котором может находиться параметр и оценивается вероятность $P(\theta \in (\theta_1, \theta_2))$. Если получена такая оценка $P(\theta \in (\theta_1, \theta_2)) \ge \gamma$, то интервал (θ_1, θ_2) называется **доверительным интервалом** для параметра θ, а число γ называется **надежностью** сделанной оценки. Если надежность попадания в предложенный интервал достаточно высока (например, больше 95%), за значение θ берут середину доверительного интервала ($\theta = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$).

Пример. Пусть нам нужно найти доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения случайной величины ξ при известной дисперсии σ^2. В результате опыта мы получили значения $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины и нашли эмпирическое математическое ожидание $\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$. Мы хотим исследовать разность между этим эмпирическим математическим ожиданием и реальным неизвестным нам математическим ожиданием m.

Считая, что каждое значение, полученное в результате измерения – это тоже случайная величина, не зависимая от других измерений, распределенная по тому же закону, что и ξ, мы можем рассматривать $\bar{x}$ как случайную величину, распределенную по нормальному закону (из свойств нормального распределения). Математическим ожиданием случайной величины $\bar{x}$ будет m, а дисперсией $\frac{\sigma^2}{n}$.Значит, функцией распределения случайной величины $\bar{x}$ будет $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma}\sqrt{n})$.

Следовательно,

$$P(|\bar{x}-m| < \delta) = P(m-\delta < \bar{x} < m+\delta) = F(m+\delta) - F(m-\delta) =$$
$$= \Phi(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\delta\sqrt{n}}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}).$$

Задав надежность γ, мы по таблицам для функции $\Phi(x)$ найдем то значение аргумента, при котором эта функция имеет значение $\frac{\gamma}{2}$. Теперь остается приравнять полученное значение аргумента выражению $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ и найти длину доверительного интервала 2δ.

Итак, мы получили параметры и выбрали подходящий закон распределения с этими параметрами. Теперь на основании полученного статистического материала нам предстоит проверить **гипотезу**, состоящую в том, что исследуемая случайная величина подчиняется конкретному закону распределения, например, имеет функцию распределения $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x - m_0}{\sigma_0})$. Для проверки гипотезы существуют специальные критерии, позволяющие найти вероятность того, что отклонения данных, полученных в результате измерений, от данных, получаемых в соответствии с использованием гипотезы, вызваны случайными причинами. Если такая вероятность мала, гипотезу отвергают, если велика, гипотезу принимают.

Задания.

1. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

2. Построить полигоны частот распределения.

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	20	30	12

Найти среднее.

3. Построить гистограммы частот распределения (в первом столбце указан частичный интервал, во втором – сумма частот вариант частичного интервала).

а)

2 – 5	9
5 – 8	10
8 – 11	25
11 – 14	6;

б)

150 – 155	3
155 – 160	5
160 – 165	8
165 – 170	6
170 – 175	2

4. Дана выборка: 3, 1, 2, 1, 0, 4, 1, 4, 5, 6, 2, 5, 1, 0, 2, 3, 3, 3, 0,1.

1) Составить таблицы частот и относительных частот;

2) Построить полигоны частот и относительных частот;
3) Вычислить среднее;
4) Составить интервальные таблицы частот и относительных частот с шагом $h = 2$;
5) Построить гистограмму.

5. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}99$ неизвестного математического ожидания m нормально распределенного признака X генеральной совокупности , если известны генеральное квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x_B}$ и объем выборки : а) $\sigma = 4, \overline{x_B} = 10{,}2, n = 16$; б) $\sigma = 5, \overline{x_B} = 16{,}8, n = 25$.

6. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i: -2 1 2 3 4 5
n_i 2 1 2 2 2 1

Оценить с надежностью $\gamma = 0{,}95$ математическое ожидание m нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

В конце пособия мы помещаем таблицу удвоенной функции Лапласа.

Таблица удвоенной функции Лапласа

x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$	x	$2\cdot\Phi(x)$
0.00	0.00000	0.36	0.28115	0.73	0.53461	1.10	0.72867	1.47	0.85844	1.84	0.93423
0.01	0.00798	0.37	0.28862	0.74	0.54070	1.11	0.73300	1.48	0.86113	1.85	0.93569
0.02	0.01596	0.38	0.29605	0.75	0.54675	1.12	0.73729	1.49	0.86378	1.86	0.93711
0.03	0.02393	0.39	0.30346	0.76	0.55275	1.13	0.74152	1.50	0.86639	1.87	0.93852
0.04	0.03191	0.40	0.31084	0.77	0.55870	1.14	0.74571	1.51	0.86696	1.88	0.93989
0.05	0.03988	0.41	0.31819	0.78	0.56461	1.15	0.74986	1.52	0.87149	1.89	0.94124
0.06	0.04784	0.42	0.32552	0.79	0.57047	1.16	0.75395	1.53	0.87398	1.90	0.94257
0.07	0.05581	0.43	0.33280	0.80	0.57629	1.17	0.75800	1.54	0.87644	1.91	0.94387
0.08	0.06376	0.44	0.34006	0.81	0.58206	1.18	0.76200	1.55	0.87886	1.92	0.94514
0.09	0.07171	0.45	0.34729	0.82	0.58778	1.19	0.76595	1.56	0.88124	1.93	0.94639
0.10	0.07966	0.46	0.35448	0.83	0.59346	1.20	0.76986	1.57	0.88358	1.94	0.94762
0.11	0.08759	0.47	0.36164	0.84	0.59909	1.21	0.77372	1.58	0.88589	1.95	0.94882
0.12	0.09552	0.48	0.36877	0.85	0.60468	1.22	0.77754	1.59	0.88817	1.96	0.95000
0.13	0.10348	0.49	0.37587	0.86	0.61021	1.23	0.78130	1.60	0.89040	1.97	0.95116
0.14	0.11134	0.50	0.38292	0.87	0.61570	1.24	0.78502	1.61	0.89260	1.98	0.95230
0.15	0.11924	0.51	0.38995	0.88	0.62114	1.25	0.78870	1.62	0.89477	1.99	0.95341

0.16	0.12712	0.52	0.39694	0.89	0.62653	1.26	0.79233	1.63	0.89690	2.00	0.95450
0.17	0.13499	0.53	0.40389	0.90	0.63188	1.27	0.79592	1.64	0.89899	2.01	0.95557
0.18	0.14285	0.54	0.41080	0.91	0.63718	1.28	0.79945	1.65	0.90106	2.02	0.95662
0.19	0.15069	0.55	0.41768	0.92	0.64243	1.29	0.80295	1.66	0.90309	2.03	0.95764
0.20	0.15852	0.56	0.42452	0.93	0.64763	1.30	0.80640	1.67	0.90508	2.04	0.95865
0.21	0.16633	0.57	0.43132	0.94	0.65278	1.31	0.80980	1.68	0.90704	2.05	0.95964
0.22	0.17413	0.58	0.43809	0.95	0.65789	1.32	0.81316	1.69	0.90897	2.06	0.96060
0.23	0.18191	0.59	0.44481	0.96	0.66294	1.33	0.81648	1.70	0.91087	2.07	0.96155
0.24	0.18967	0.60	0.45149	0.97	0.66795	1.34	0.81975	1.71	0.91273	2.08	0.96247
0.25	0.19741	0.61	0.45814	0.98	0.67291	1.35	0.82298	1.72	0.91457	2.09	0.96338
0.26	0.20514	0.62	0.46474	0.99	0.67783	1.36	0.82617	1.73	0.91637	2.10	0.96427
0.27	0.21284	0.63	0.47131	1.00	0.68269	1.37	0.82931	1.74	0.91814	2.11	0.96514
0.28	0.22052	0.64	0.47783	1.01	0.68750	1.38	0.83241	1.75	0.91988	2.12	0.96599
0.29	0.22818	0.65	0.48431	1.02	0.69227	1.39	0.83547	1.76	0.92159	2.13	0.96683
0.30	0.23582	0.66	0.49075	1.03	0.69699	1.40	0.83849	1.77	0.92327	2.14	0.96765
0.31	0.24344	0.67	0.49714	1.04	0.70166	1.41	0.84146	1.78	0.92492	2.15	0.96844
0.32	0.25103	0.68	0.50350	1.05	0.70628	1.42	0.84439	1.79	0.92655	2.16	0.96923
0.33	0.25860	0.69	0.50981	1.06	0.71086	1.43	0.84728	1.80	0.92814	2.17	0.96999
0.34	0.26614	0.70	0.51607	1.07	0.71538	1.44	0.85013	1.81	0.92970	2.18	0.97074
0.35	0.27366	0.71	0.52230	1.08	0.71986	1.45	0.85294	1.82	0.93124	2.19	0.97148
		0.72	0.52848	1.09	0.72429	1.46	0.85571	1.83	0.93275	2.20	0.97219